до центров этих сфер, если $R = 4$ и $R_1 = 3$.

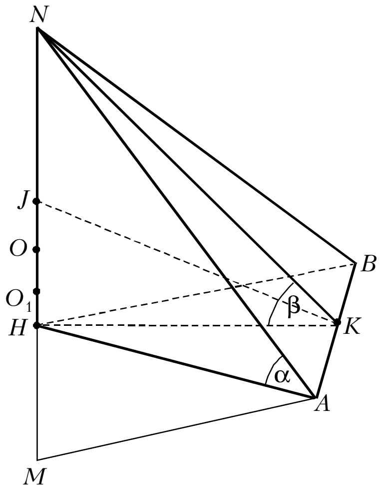

Рис. 5

Решение. Проведем высоту NH данной шестиугольной пирамиды (рис.4 и 5). Тогда $\angle HKN$ – линейный угол двугранного угла при основании пирамиды. Центр J вписанной сферы лежит на высоте пирамиды и на биссектрисе угла HKN.

Введем обозначения: $JH = r$ (радиус вписанной сферы), $NH = h$, $\angle HKN = \beta$, $\angle NAH = \alpha$. По теореме о биссектрисе угла треугольника имеем

$$\frac{HJ}{JN} = \frac{HK}{KN},$$

или

$$\frac{r}{h-r} = \cos\beta,$$

откуда

$$r = \frac{h\cos\beta}{1+\cos\beta}. \qquad (4)$$

Вычислим неизвестные h и $\cos\beta$. Сначала найдем угол α. Воспользовавшись формулой (2), получим уравнение

$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1 - \frac{1}{2}\cos\alpha\right),$$

или

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha + \frac{R_1}{R} = 0,$$

откуда $\cos\alpha = 1 - \sqrt{1 - \frac{R_1}{R}}$ (второй корень уравнения не подходит, так как $\cos\alpha < 1$).

При $R = 4$ и $R_1 = 3$ имеем

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \ \alpha = 60^\circ.$$

Далее из треугольников AMN и AHN находим

$$h = 2R\sin^2\alpha, \ h = 8\cdot\frac{3}{4} = 6.$$

Остается найти связь между углами α и β. Из треугольников ANH и KNH имеем $AH = h\operatorname{ctg}\alpha$, $KH = h\operatorname{ctg}\beta$. А так как $KH = AH\sin 60^\circ$, то

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\alpha,$$

и легко находим, что $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{2}$ и $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Подставив значения h и $\cos\beta$ в формулу (4), получим

$$r = \frac{3\left(\sqrt{5}-1\right)}{2} \approx 1{,}8.$$

Расстояние от вершины N пирамиды до центра O сферы, описанной около пирамиды, равно R, а расстояние от вершины N до центра O_1 сферы, касающейся всех ребер, равно $\frac{R}{\cos\alpha}$. Следовательно, если $R = 4$ и $R_1 = 3$, то $NO = 4$, $NJ \approx 6 - 1{,}8 = 4{,}2$ и $NO_1 = 6$ (т.е. центр O_1 совпадает с центром основания H).

Предлагаем читателю самостоятельно доказать истинность следующих соотношений между основными углами в правильной n-угольной пирамиде:

а) $\operatorname{tg}\alpha = \cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\beta$,

б) $\cos\alpha = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\sin\frac{\gamma}{2}$, в) $\cos\beta = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$,

где γ – величина плоского угла при вершине пирамиды, α и β – величины тех же углов, что и в задаче 5.

Формулы а), б) и в) находят применение при решении предлагаемых ниже задач.

Следующая задача по содержанию близка предыдущей. Сохраняя прежние обозначения, при решении ее воспользуемся уже известными формулами.

Задача 6. *Дана правильная треугольная пирамида, r и R – радиусы вписанной и описанной сфер. Найдите высоту h пирамиды и радиус R_1 сферы, касающейся всех ребер пирамиды, если $r = 1$ и $R = 3{,}5$.*

Решение. Воспользуемся формулами

$$h = 2R\sin^2\alpha \ \text{ и } \ h = \frac{r(1+\cos\beta)}{\cos\beta}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{2R}{r}\sin^2\alpha = \frac{1+\cos\beta}{\cos\beta}. \qquad (5)$$

В правильной треугольной пирамиде углы α и β связаны: $\operatorname{ctg}\alpha = 2\operatorname{ctg}\beta$. В силу тождества $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ имеем

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{4}{\sin^2\beta} - 3, \text{ откуда } \sin^2\alpha = \frac{1-\cos^2\beta}{1+3\cos^2\beta}.$$

Подставив значение $\sin^2\alpha$ в равенство (5), получим уравнение

$$(2R+3r)\cos^2\beta - 2R\cos\beta + r = 0,$$

которое при $\frac{R}{r} \ge 3$ имеет два корня:

$$\cos\beta = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 2Rr - 3r^2}}{2R+3r}$$

(если $\frac{R}{r} = 3$, то корни равны: $\cos\beta = \frac{1}{3}$).

При $r = 1$ и $R = 3{,}5$ уравнение принимает вид

$$10\cos^2\beta - 7\cos\beta + 1 = 0,$$

откуда $\cos\beta = \frac{1}{2}$ или $\cos\beta = \frac{1}{5}$.

Если $\cos\beta = \frac{1}{2}$, то $\beta = 60^\circ$, $\sin^2\alpha = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{3}{7}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Получим

$$h = 2R\sin^2\alpha, \ h = 7;$$

$$R_1 = 2R\cos\alpha\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right), \ R_1 = 2\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right) \approx 2.$$

Если $\cos\beta = \frac{1}{5}$, то $\sin^2\alpha = \frac{6}{7}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$. Получим

$$h = 6, \ R_1 = \sqrt{7} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}8.$$

Продолжим исследование свойств сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды. Для этого предварительно решим следующую задачу.