

Рис. 12

Задача 4. Сколько осей симметрии имеет куб?

Рассмотрим теперь правильный тетраэдр $ABCD$ (рис.13). Прямая l , проходящая через середины противоположных ребер AB и

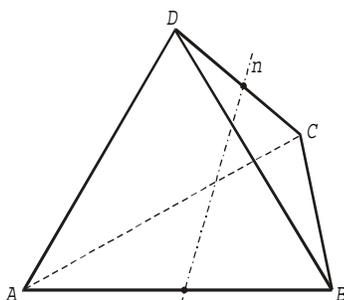


Рис. 13

CD , перпендикулярна им. Поэтому она является осью симметрии тетраэдра.

Задачи

5. Сколько осей симметрии имеет правильный тетраэдр?

6. Докажите, что если некоторый многогранник имеет k осей симметрии, где $k \geq 1$, то k нечетно.

7 (M555). Рассмотрим пересечение а) двух; б) трех цилиндров одинакового радиуса, оси которых взаимно перпендикулярны и проходят через одну точку. Сколько плоскостей симметрии имеет это пересечение?

Помимо вращений вокруг прямых, тетраэдр и куб имеют и другие самосовмещения. Например, у куба есть симметрия относительно плоскости ACC_1A_1 или относительно плоскости, проходящей через середины ребер AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 .

Давайте сосчитаем количество самосовмещений правильного тетраэдра $ABCD$. Посмотрим при-

стально на его вершину A . Очевидно, при самосовмещении точка A может перейти в любую из четырех вершин A, B, C, D . Затем три остальные вершины B, C и D могут перейти в любом порядке в оставшиеся (после того, как одну из вершин заняла точка A) три вершины тетраэдра. Поскольку количество способов разложить три данные точки в три места равно шести, то группа самосовмещений тетраэдра состоит из $4 \cdot 6 = 24$ элементов. (Между прочим, если вы сделаете тетраэдр из металла или дерева и начнете перемещать его в пространстве, то сможете выполнить не все 24, а только 12 перемещений — те, которые сохраняют ориентацию³ пространства.)

Задачи

8. Сколько самосовмещений имеет а) куб; б) октаэдр; в) додекаэдр; г) икосаэдр? Сколько из них сохраняют ориентацию, а сколько меняют?

9. Инопланетяне делают игрушки в форме а) куба; б) октаэдра; в) додекаэдра; г) икосаэдра и раскрашивают каждую грань в один из а) 6; б) 8; в) 12; г) 20 имеющихся цветов, каждую грань — в свой цвет. Сколько разных видов игрушек они могут изготовить? (Игрушки одинаковые, если одну из них так можно повернуть в пространстве, что она станет такой же, как другая.)

Множество Φ называют транзитивным, если для любых двух его точек A и B существует самосовмещение f множества Φ , которое переводит A в B . Например, множество вершин правильного 10-угольника транзитивно.

Задачи

10. Придумайте транзитивное множество, состоящее из 10 точек, не являющихся вершинами правильного 10-угольника.

11. Перечислите все конечные транзитивные подмножества плоскости.

³Я не могу здесь подробно обсуждать понятие ориентации. Скажу лишь, что вращение вокруг прямой сохраняет ориентацию, а симметрия относительно плоскости — меняет.

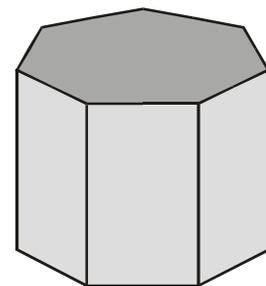


Рис. 14

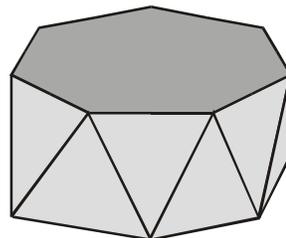


Рис. 15

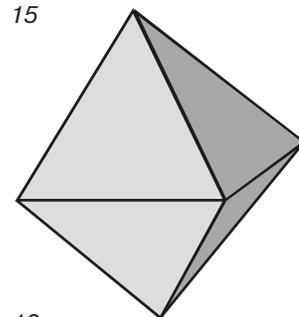


Рис. 16

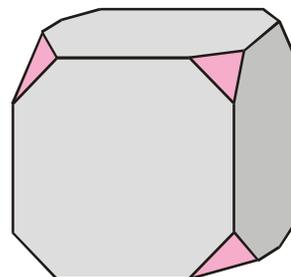


Рис. 17

Подробнее о транзитивных множествах можно прочитать в статьях В.Болтянского «Транзитивные множества и правильные многогранники» («Квант» №7 за 1980 год) и А.Шкляра «О транзитивных многогранниках» («Квант» №12 за 1980 год). Не имея здесь возможности подробно пересказывать содержание этих статей, ограничусь несколькими примерами транзитивных многогранников. Это правильная семиугольная призма (рис.14), антипризма (рис.15), октаэдр (рис.16) и усеченный куб (рис.17).