

Точки Прямые	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
$l_1$	×	×	×				
$l_2$			×	×	×		
$l_3$	×				×	×	
$l_4$	×			×			×
$l_5$		×			×		×
$l_6$							
$l_7$		×		×		×	

Рис. 17

**Упражнение 2**

а) В диаграмме на рисунке 17 строка, соответствующая прямой  $l_6$ , не заполнена. Определите, какие точки лежат на прямой  $l_6$ , и заполните эту строку.

б) Пользуясь диаграммой на рисунке 17, назовите прямые, пересекающиеся в точке *E*. Проверьте ответ, используя рисунок 10.

в) Составьте диаграммы для геометрий, представленных на рисунках 6 и 7.

В конечных геометриях используется хорошо знакомое определение параллельных прямых: прямые называют *параллельными*, если они не пересекаются, т.е. не имеют общих точек.

В геометрии на рисунке 4 параллельных прямых нет – любые две прямые из трех имеющихся пересекаются. Нет параллельных прямых и на рисунках 5, 6, 10. (Контрольный вопрос: в какой точке на рисунке 10 пересекаются прямые, одна из которых проходит через точки *F* и *D*, а другая – через точки *G* и *E*?)

Геометрию, в которой нет параллельных прямых (т.е. любые две прямые пересекаются), называют *проективной геометрией*. В такой геометрии принимается следующая **аксиома А4-Р**: *любые две прямые или совпадают, или пересекаются*. (Здесь буква Р в обозначении – от слова *проективная*.)

Вспомним, как звучит соответствующая **аксиома А4-А** о параллельных из школьного учебника: *через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной*. Такие геометрии называют *аффинными геометриями*. (От слова аффинная – вторая буква А в обозначении.)

Модель конечной аффинной геометрии представлена на рисунках 7, 8, 9, 11.

В *гиперболической геометрии* (или геометрии Лобачевского) принимается такая **аксиома А4-Г**: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не менее двух прямых, параллельных данной прямой*. Буква Г в обозначении аксиомы – от слова *гиперболическая*. Конечные геометрии с такой аксиомой представлены на рисунках 12, 14, 15. Так, на рисунке 12 прямые *BC* и *CD*, проходящие через точку *C*, параллельны прямой *AE*.

Таким образом, в нашей воображаемой геометрии

метро могут быть реализованы три различные геометрии: проективная, в которой выполнены условия **А1, А2, А3, А4-Р**, аффинная – с условиями **А1, А2, А3, А4-А**, гиперболическая – с аксиомами **А1, А2, А3, А4-Г**.

Мы рассказали о различных примерах конечных геометрий и их моделях. При этом прямая была представлена либо некоторой линией, либо ребром многогранника, либо строкой таблицы. Опишем теперь построение *арифметической* модели, пригодной для интерпретации любой конечной геометрии. В этом случае *точками* будем называть различные простые числа, а *прямыми* – произведения некоторых из этих чисел.

Например, точки на рисунке 4 можно трактовать как числа 2, 3, 5, а прямые – как числа 6, 10, 15, равные их попарным произведениям.

Пусть точки на рисунке 6 – это числа 2, 3, 5, 7. Тогда прямые – это числа 14, 21, 35 и 30. На последней прямой 30 лежат три точки 2, 3 и 5 – произведение этих чисел как раз равно 30.

Рассмотрим в такой геометрии прямую *b* и точку *a* (здесь *a* – простое число, *b* – составное число, имеющее по аксиоме **А1** по крайней мере два простых сомножителя). Будем говорить, что *прямая b* *проходит через точку a*, если число *a* является делителем числа *b*. Ясно, что *прямые b* и *c* *пересекаются в точке a*, если  $\text{НОД}(b, c) = a$ , где  $\text{НОД}(b, c)$  – наибольший общий делитель чисел *b* и *c*. И наконец, *прямые b* и *c* *являются параллельными*, если  $\text{НОД}(b, c) = 1$ , т.е. *b* и *c* – взаимно простые числа.

Например, геометрия, представленная на рисунке 12 (или в таблице 13), может быть образована пятью точками – пятью простыми числами 2, 3, 5, 7, 11 и десятью прямыми – попарными произведениями этих простых чисел:  $2 \times 3 = 6$ ;  $2 \times 5 = 10$ ;  $2 \times 7 = 14$ ;  $2 \times 11 = 22$ ;  $3 \times 5 = 15$ ;  $3 \times 7 = 21$ ;  $3 \times 11 = 33$ ;  $5 \times 7 = 35$ ;  $5 \times 11 = 55$ ;  $7 \times 11 = 77$ . Здесь прямые 22 и 21 параллельны, так как  $\text{НОД}(22, 21) = 1$ , а прямые 15 и 35 пересекаются в точке 5, ибо  $\text{НОД}(15, 35) = 5$ .

**Упражнение 3**

а) Точки в геометрии на рисунке 12 отождествим с простыми числами 13, 17, 19, 31, 37. Укажите все прямые в этой геометрии. Через какие точки проходит прямая 527?

б) Пересекаются ли прямые 527 и 323?

в) Докажите, что прямые 527 и 481 параллельны.

г) Постройте арифметические модели всех рассмотренных выше геометрий и проверьте выполнение аксиом для некоторых элементов этих геометрий.

В заключение заметим, что в геометрии, изучаемой в школе, выполняются аксиомы **А1, А2, А3, А4-А**. Следовательно, школьная геометрия является аффинной. Она, как хорошо известно, не является конечной. Существуют также проективные и гиперболические геометрии, не являющиеся конечными.