(очевидно, в этой сумме конечное число отличных от нуля слагаемых).

Используя очевидное неравенство $[t] \le t$ для любого вещественного числа t, получаем

$$\alpha = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{2^k}\right] + \ldots <$$

$$< \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^k} + \ldots = n\,.$$

Лемма доказана.

В.Сендеров

M1809*. *Пользуясь одной линейкой, найдите центры а) двух пересекающихся окружностей; б) двух касающихся (внешним или внутренним образом) окружностей; в) двух концентрических окружностей.*

Воспользуемся известной теоремой: если из точки вне окружности проведены к окружности две касательные и две секущие и если точки пересечения секущих с окружностью рассматриваются как вершины выпуклого четырехугольника, то точка пересечения диагоналей этого четырехугольника принадлежит прямой, проходящей через точки касания указанных касательных с окружностью, а две противоположные стороны четырехугольника или параллельны, или точка пересечения их продолжений лежит на той же прямой.

Доказательство теоремы можно найти, например, в книге И.Ф.Шарыгина «Задачи по геометрии: планиметрия» (серия «Библиотечка «Квант», вып. 17; задача II.271).

Эта теорема позволяет выполнить следующее построение.

Построение 1. *Из точки вне окружности провести к окружности касательные.*

Проведем из точки A к окружности три произвольные секущие, которые пересекут окружность в точках B и C, D и E, F и G (рис.1). Прямые BE и DC пересекаются в точке K, а прямые DG и FE – в точке L. Прямая KL пересечет окружность в точках M и N. Прямые AM и AN – искомые касательные.

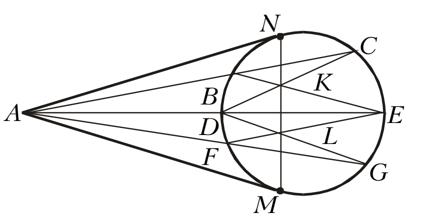

Рис.1

Устремляя угол между секущими к нулю, из теоремы получим следствие: если из точки вне окружности проведены к окружности две касательные и секущая, то на прямой, проходящей через точки касания касательных с окружностью, пересекаются (если они не параллельны) две другие касательные к окружности, проведенные через точки пересечения окружности с секущей.

С помощью этого следствия нетрудно доказать еще одну теорему: пять указанных ниже прямых, если они не параллельны, пересекаются в одной точке: две касательные к окружности, проведенные через точки ее пересечения с диагональю описанного около окружности четырехугольника, продолжение второй диагонали четырехугольника и две прямые, каждая из которых проходит через две расположенные по одну сторону от второй диагонали точки касания окружности со сторонами четырехугольника.

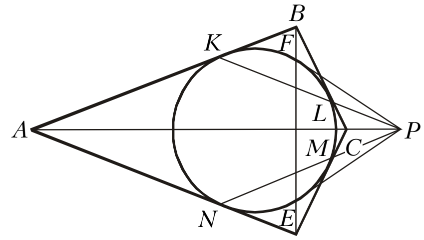

Рис.2

Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, K, L, M, N – точки касания его сторон с окружностью, и пусть прямые KL и MN пересекаются в точке P (рис.2).

Из точки P проведем к окружности касательные PE и PF (E и F – точки касания). Согласно указанному выше следствию, прямые AB и BC, AD и CD пересекаются на прямой EF. Но эти прямые пересекаются на диагонали BD. Следовательно, точки E и F лежат на диагонали BD.

Остается доказать, что продолжение диагонали AC проходит через точку P.

Пусть прямая KL пересекает прямую AC в точке P', а прямая NM пересекает AC в точке P''.

Из треугольника ABC, по теореме Менелая, получим

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CP'}{P'A} = -1\,.$$

Точно так же из треугольника ADC

$$\frac{AN}{ND} \cdot \frac{DM}{MC} \cdot \frac{CP''}{P''A} = -1\,,$$

откуда

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CP'}{P'A} = \frac{AN}{ND} \cdot \frac{DM}{MC} \cdot \frac{CP''}{P''A}\,.$$

Учитывая равенство длин касательных, проведенных к окружности из одной точки, $\frac{CP'}{P'A} = \frac{CP''}{P''A}$, т.е. точки P' и P'' совпадают, или, что то же самое, прямая AC проходит через точку пересечения прямых KL и NM. Теорема обосновывает такое построение.

Построение 2. *Провести касательную к окружности через заданную на окружности точку.*

Пусть на окружности задана точка E (см. рис.2). Через эту точку проведем произвольную секущую (но заведомо не через центр окружности), которая пересечет окружность в точке F. Возьмем на прямой EF по разные стороны от окружности произвольные точки B и D и из них проведем к окружности касательные (построение 1). Пусть соответствующие точки пересечения касательных – A и C, а точки касания – K, L, M, N. Прямые KL, NM и AC пересекаются в точке P, а прямые PE и PF касаются окружности.

Понадобятся еще два вспомогательных построения, доказательства которых почти очевидны, а потому опускаются.

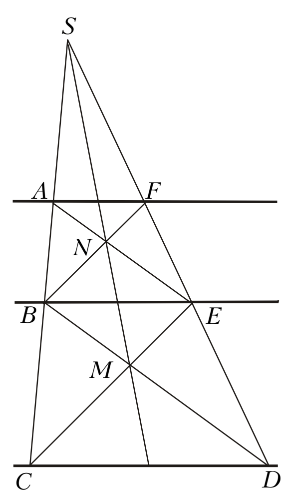

Рис.3

Построение 3. Через точку A провести прямую, параллель-