чит свет и один раз – выключит. По окончании пути весь объект будет неосвещен.

б) Если раскрасить вершины в шахматном порядке, то сторож может перебраться в вершины того же цвета, что и левый нижний угол, и только в эти вершины. Почему?

Да потому что сторож может «пройти по диагонали», т.е. перебраться в единичном квадрате $ABCD$ из A в противоположную вершину C. Для этого достаточно пройти по пути $ABCDABC$, щелкая всеми встречающимися выключателями, кроме D. Умея «проходить по диагонали», сторож сможет пройти в любую вершину того же цвета, что и левый нижний угол.

И сторож не может перебраться в вершины другого цвета. Чтобы доказать это, докажем, что если сторожу удалось погасить весь свет, то он сделал четное число переходов по единичным коридорам. (Этого достаточно: так как каждый переход меняет цвет вершины, то после четного числа переходов цвет вернется к первоначальному.)

Будем считать, что каждый переключатель может находиться в положениях ВВЕРХ или ВНИЗ и что вначале все переключатели были ВНИЗ. Заметим, что на концах освещенного коридора положения переключателей различны. Сторож может выполнять элементарные действия двух видов: щелкать выключателем и переходить от выключателя к соседнему выключателю по освещенному коридору. После любого из таких действий он оказывается у противоположно направленного переключателя.

В полностью неосвещенном объекте все выключатели будут одинаково ориентированы: все ВВЕРХ или все ВНИЗ. Разберем оба случая. Если в конце все выключатели ВНИЗ, то сторож в сумме совершил четное число действий, так как начал и закончил у выключателя ВНИЗ. Поскольку он щелкнул каждым выключателем четное число раз, то общее число щелчков тоже четно. Значит, четно и число переходов.

Если же в конце все выключатели ВВЕРХ, то сторож сделал в сумме нечетное число действий. Но так как всего выключателей 81 (нечетное число!), причем каждым сторож щелкнул нечетное число раз, то общее число щелчков тоже нечетно. Значит, число переходов и в этом случае четно.

А.Шаповалов

М1803. *В квадрате ABCD взяты точки P и Q такие, что $\angle PAQ = \angle QCP = 45°$ (рис.1). Докажите, что суммарная площадь треугольников PAQ, PCB и QCD равна суммарной площади треугольников QCP, QAD и PAB.*

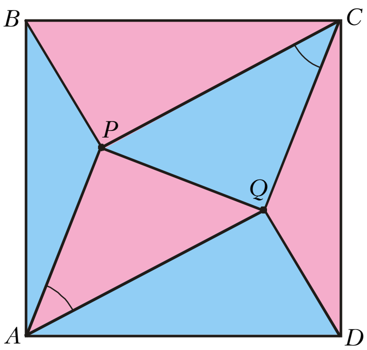

Рис.1

Симметрично отразим $\triangle APB$ относительно прямой AP, а $\triangle AQD$ – относительно прямой AQ. При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку M (рис.2). Значит, суммарная площадь треугольников QCP, QAD и PAB равна площади четырехугольника $APCQ$ плюс площадь треугольника PQM.

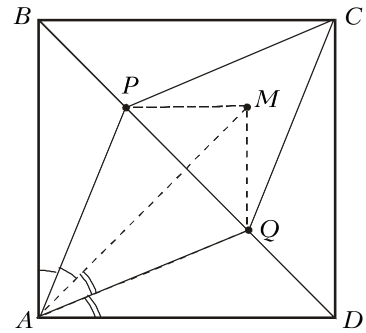

Рис.2

Симметрично отразим $\triangle CPB$ относительно прямой CP, а $\triangle CQD$ – относительно прямой CQ. При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку N. Значит, суммарная площадь треугольников PAQ, PCB и QCD равна площади четырехугольника $APCQ$ плюс площадь треугольника PQN.

Остается заметить, что площади треугольников PQM и PQN равны, поскольку сами треугольники равны.

В.Произволов

М1804. *Докажите, что*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$$

для любых положительных чисел a, b и c.

Так как выражение в левой части однородно относительно a, b и c (т.е. $f(a,b,c)=f(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$), то мы можем считать, что $abc=1$.

Из равенства $abc=1$ следует, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8abc}{a^3}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8}{a^3}}}.$$

Пусть

$$1+\frac{8}{a^3}=x,\ 1+\frac{8}{b^3}=y,\ 1+\frac{8}{c^3}=z,$$

тогда нужно доказать неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\ge 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}\ge\sqrt{xyz} \Leftrightarrow xy+xz+yz+$$

$$+\ 2\sqrt{x^2yz}+2\sqrt{xy^2z}+2\sqrt{xyz^2}\ge xyz \Leftrightarrow xy+xz+yz+$$

$$+\ 2\sqrt{xyz}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\ge xyz. \quad (1)$$

Теперь, применив неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, находим

$$x=1+\underbrace{\frac{1}{a^3}+\ldots+\frac{1}{a^3}}_{8\text{ раз}}\ge\ 9\sqrt[9]{1\cdot\left(\frac{1}{a^3}\right)^8}=\frac{9}{a^{8/3}},$$

поэтому $\sqrt{x}\ge\frac{3}{a^{4/3}}$. Аналогично,

$$\sqrt{y}\ge\frac{3}{b^{4/3}},\ \sqrt{z}\ge\frac{3}{c^{4/3}},$$

следовательно,

$$\sqrt{xyz}\ge\frac{27}{(abc)^{4/3}}=27$$

и

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{xyz}}\ge 3\sqrt[3]{27}=9.$$