Итак, числа z и t целые, $1 < z + t\sqrt{d} \le a + b\sqrt{d}$ и $z^2 - dt^2 = 1$. В силу леммы 4 это возможно лишь в случае равенства $z + t\sqrt{d} = a + b\sqrt{d}$, т.е. в случае

$$x + y\sqrt{d} = q^n,$$

что и требовалось доказать.

Упражнение 44. Пусть a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - db^2 = 1$. Если x, y – целые числа и $x^2 - dy^2 = 1$, то для некоторого целого числа n имеем $x + y\sqrt{d} = \pm\left(a + b\sqrt{d}\right)^n$. Докажите это.

Уравнение $x^2 - dy^2 = c$

Доказательство теоремы 12 могло показаться довольно длинным. Не вполне ясно, что проще: жонглировать неравенствами или иррациональностями. Оказывается, однако, что использованное при доказательстве теоремы 12 рассуждение позволяет выяснить, как устроены решения в целых числах уравнения $x^2 - dy^2 = c$.

Напомним обозначения. Как и прежде, d – натуральное число, не являющееся квадратом; a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - db^2 = 1$; $q = a + b\sqrt{d}$; наконец, c – некоторое целое число, $c \ne 0$.

Пусть x и y – целые числа, $x^2 - dy^2 = c$ и $x + y\sqrt{d} > 0$. Рассмотрим числа вида q^n, где n пробегает множество всех целых чисел. Поскольку $\lim\limits_{n\to-\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, то существует такое целое число n, что

$$q^{n-1} < x + y\sqrt{d} \le q^n.$$

Рассмотрим число

$$E = \left(x + y\sqrt{d}\right) : q^{n-1}.$$

Легко понять, что E представимо в виде

$$E = z + t\sqrt{d},$$

где z и t – целые числа. При этом

$$z^2 - dt^2 = c \qquad (*)$$

и

$$1 < z + t\sqrt{d} \le q. \qquad (**)$$

Теорема 13. *Рассмотрим всевозможные пары целых чисел $(z;\, t)$, удовлетворяющие условиям $(*)$ и $(**)$. Верны следующие утверждения.*

1) Если множество M таких пар пусто, то уравнение $x^2 - dy^2 = c$ не имеет решений в целых числах x и y.

2) Множество M конечно.

3) Все целочисленные решения уравнения $x^2 - dy^2 = c$ можно получить из формул $x + y\sqrt{d} = \pm\left(z + t\sqrt{d}\right)q^n$, где $(z;t) \in M$, а n – целое число.

Доказательство. Первое и третье утверждения очевидны. Докажем второе. Пусть $(z;t) \in M$. Тогда

$$z - t\sqrt{d} = \frac{c}{z + t\sqrt{d}},$$

так что

$$\left|z - t\sqrt{d}\right| < |c|$$

и, следовательно,

$$|z| = \left|\frac{\left(z + t\sqrt{d}\right) + \left(z - t\sqrt{d}\right)}{2}\right| < \frac{q + |c|}{2},$$

$$|t| = \left|\frac{\left(z + t\sqrt{d}\right) - \left(z - t\sqrt{d}\right)}{2}\right| < \frac{q + |c|}{2\sqrt{d}}.$$

Теорема 13 доказана.

Упражнения

45. Уравнение $x^2 - 11y^2 = 17$ не имеет решений в целых числа. Докажите это.

46. Найдите все наборы а) 11; б) 23 последовательных чисел, сумма квадратов которых является квадратом целого числа.

47. Найдите все такие натуральные числа x, что число, получаемое зачеркиванием последней цифры числа x^2, тоже является квадратом натурального числа. (А.Балахонкин и Ф.Кац, девятиклассники школы 131, Казань).

48. Решите в целых числах уравнение а) $x^2 - 17y^2 = -16$; б) $x^2 - \left(n^2 + 1\right)y = -1$, где n – натуральное число.

49. Если уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ имеет решение в натуральных числах x и y, то выбрав из таких решений то, где x – наименьшее возможное, получим а) $q = \left(x + y\sqrt{d}\right)^2$; б) $|M| = 1$. Докажите это.

50. При $a \ge 2$ уравнение $x^2 - \left(a^2 + 1\right)y^2 = -a^2$ имеет не менее трех серий решений, т.е. множество M для него состоит не менее чем из трех элементов. Докажите это.

51. Пусть p – простое число, $p \equiv 1 \pmod 4$, a – наибольшее (существующее в силу теоремы 10) натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - pb^2 = 1$. Докажите, что а) a нечетно; б) для некоторых натуральных чисел u и v верны равенства $a \pm 1 = 2u^2$, $a \pm 1 = 2pv^2$ и $b = 2uv$; в) $u^2 - pv^2 = -1$.

52*. Решите в натуральных числах уравнение

а) $3^s = 2^r + 1$; б) $x^2 + 2^y = 3^z$.

53. Решите в целых числах уравнение

а) $x^2 + 8xy + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$;

б) $3u^2 + 11uv + 9v^2 + u + v = 0$.

(Продолжение следует)