$y = \dfrac{\varphi_{4k-2} + \varphi_{4k} + 1}{5} = \varphi_{2k-1}\varphi_{2k}$ (мы воспользовались тождеством $\varphi_{2m} + \varphi_{2m+2} - (-1)^m = 5\varphi_m\varphi_{m+1}$ – см. упражнение 42). Теорема 11 доказана.

Упражнения

41. Докажите, что если x, y – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0$ и неравенству $x \geq y$, то $2x \geq 3y$.

42. Докажите

а) сравнение $\varphi_{n+3} + \varphi_{n+5} \equiv \varphi_{n-1} + \varphi_{n+1} \pmod 5$;

б) тождества $\varphi_{2m} = \varphi_{m+1}^2 - \varphi_{m-1}^2$ и $\varphi_{2m+1} = \varphi_m^2 + \varphi_{m+1}^2$;

в) тождество $\varphi_{2m} + \varphi_{2m+2} = 5\varphi_m\varphi_{m+1} + (-1)^m$.

43 (М905). Уравнение $4x^n + (x+1)^2 = y^2$ относительно натуральных чисел x и y а) имеет бесконечно много решений при $n = 2$; б) не имеет решений, если $n \neq 2$ и n – натуральное число. Докажите это.

Использование иррациональностей

Неравенства, неравенства, неравенства... Есть ощущение какого-то фокуса, когда все сходится, но причина удачи спрятана и не видна наивному зрителю. Сейчас мы докажем теорему 9 заново. Надеемся, этим мы поможем вам вполне уяснить доказательство этой теоремы.

Лемма 1. *Если $x^2 - dy^2 > 0$ и $x + y\sqrt{d} > 0$, то $x > 0$.*

Доказательство.

$$2x = x + y\sqrt{d} + \frac{x^2 - dy^2}{x + y\sqrt{d}} > 0 .$$

Есть и другой способ – «от противного». Предположим, что $x \leq 0$. Тогда обе части неравенства $y\sqrt{d} > -x$ можно возвести в квадрат:

$$dy^2 > x^2 ,$$

что противоречит неравенству $x^2 - dy^2 > 0$.

Лемма 2. *Если $x^2 - dy^2 = 1$ и $x + y\sqrt{d} > 1$, то $y > 0$.*

Доказательство. Пусть $y \leq 0$. Тогда

$$x - y\sqrt{d} \geq x + y\sqrt{d} > 1 .$$

Произведение чисел $x - y\sqrt{d}$ и $x + y\sqrt{d}$, каждое из которых больше 1, не может равняться 1.

Лемма 3. *Если $a^2 - db^2 = x^2 - dy^2$ и $x + y\sqrt{d} < a + b\sqrt{d}$, причем числа a, b, x и y неотрицательные, то $x < a$ и $y < b$.*

Доказательство.

$$a - b\sqrt{d} = \frac{a^2 - db^2}{a + b\sqrt{d}} < \frac{x^2 - dy^2}{x + y\sqrt{d}} = x - y\sqrt{d} .$$

Сложив неравенства

$$-x + y\sqrt{d} < -a + b\sqrt{d}$$

и

$$x + y\sqrt{d} < a + b\sqrt{d} ,$$

получаем $2y\sqrt{d} < 2b\sqrt{d}$. Дальнейшее очевидно.

Лемма 4. *Пусть a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - db^2 = 1$. Если x, y – целые числа и $1 < x + y\sqrt{d} < a + b\sqrt{d}$, то $x^2 - dy^2 \neq 1$.*

Доказательство. Предположим противное: $x^2 - dy^2 = 1$. Тогда в силу лемм 1 и 2 числа x и y положительны. В силу леммы 3 имеем $x < a$. Получили противоречие.

Следующая теорема – это другая формулировка теоремы 9.

Теорема 12. *Пусть a – наименьшее натуральное число, для которого существует такое натуральное число b, что $a^2 - db^2 = 1$. Если x, y – целые числа, $x^2 - dy^2 = 1$ и $x + y\sqrt{d} > 0$, то для некоторого целого числа n верно равенство $x + y\sqrt{d} = \left(a + b\sqrt{d}\right)^n$.*

Доказательство. Обозначим $q = a + b\sqrt{d}$. Поскольку числа a и b натуральные, то $q > 1$. Рассмотрим возрастающую геометрическую прогрессию:

$$1 < q < q^2 < q^3 < q^4 < q^5 < \ldots$$

Она стремится к бесконечности. А убывающая геометрическая прогрессия

$$1 > \frac{1}{q} > \frac{1}{q^2} > \frac{1}{q^3} > \frac{1}{q^4} > \frac{1}{q^5} > \ldots$$

стремится к нулю. Поэтому существует такое целое n, что

$$q^{n-1} < x + y\sqrt{d} \leq q^n .$$

Рассмотрим число

$$E = \left(x + y\sqrt{d}\right) : q^{n-1} .$$

Очевидно, $1 < E \leq q$. Поскольку

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{a + b\sqrt{d}} = \frac{a - b\sqrt{d}}{\left(a - b\sqrt{d}\right)\left(a + b\sqrt{d}\right)} = \frac{a - b\sqrt{d}}{a^2 - db^2} = a - b\sqrt{d} ,$$

то

$$E = \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(a - b\sqrt{d}\right)^{n-1} .$$

Воспользовавшись формулой

$$\left(r + s\sqrt{d}\right)\left(u + v\sqrt{d}\right) = (ru + dsv) + (rv + su)\sqrt{d} ,$$

мы заключаем, что число E представимо в виде $E = z + t\sqrt{d}$, где z, t – целые числа. Переходя к сопряженным числам, получаем

$$z - t\sqrt{d} = \left(x - y\sqrt{d}\right)\left(a + b\sqrt{d}\right)^{n-1} .$$

Следовательно,

$$z^2 - dt^2 = \left(z + t\sqrt{d}\right)\left(z - t\sqrt{d}\right) = \left(x + y\sqrt{d}\right)\left(x - y\sqrt{d}\right)\left(a - b\sqrt{d}\right)^{n-1}\left(a + b\sqrt{d}\right)^{n-1} = \left(x^2 - dy^2\right)\left(a^2 - db^2\right)^{n-1} = 1 .$$