через факториалы:

$$\frac{x!}{(y-1)!(x-y+1)!}=\frac{(x-1)!}{y!(x-1-y)!}.$$

После очевидных преобразований получаем

$$xy=(x-y+1)(x-y).$$

Теперь применим некоторый специальный трюк. Обозначим буквой d наибольший общий делитель чисел x и y. Тогда $x = ad$ и $y = bd$, где a и b взаимно просты. Подставив выражения для x и y в уравнение, после сокращения на d получим равенство

$$abd=(ad-bd+1)(a-b).$$

Поскольку числа $a-b$ и ab взаимно просты и поскольку числа d и $ad - bd + 1$ тоже взаимно просты, то

$$\begin{cases}ab=ad-bd+1,\\ d=a-b,\end{cases}\quad\text{т.е.}\quad\begin{cases}a=b+d,\\ (b+d)b=(b+d)d-bd+1.\end{cases}$$

Последнее уравнение после упрощений приобретает вид

$$b^2+bd-d^2=1.$$

Его решения в натуральных числах нам известны из предыдущего номера журнала: $b=\varphi_{2k-1}$ и $d=\varphi_{2k}$, где k – натуральное число. Таким образом,

$$\begin{cases}x=ad=(\varphi_{2k-1}+\varphi_{2k})\varphi_{2k}=\varphi_{2k}\varphi_{2k+1},\\ y=bd=\varphi_{2k-1}\varphi_{2k},\end{cases}$$

как и было обещано. Например, при $k = 1, 2, 3$ имеем, соответственно, $(x; y) = (2; 1), (15; 6), (104; 40)$.

Замечание. Строго говоря, надо бы проверить, что всякая пара чисел $(x;y)=(\varphi_{2k}\varphi_{2k+1};\varphi_{2k-1}\varphi_{2k})$ удовлетворяет равенству $(x-y+1)(x-y)=xy$. Немного подумав, можно понять, что это очевидно: двигаться «снизу вверх» по только что изложенному решению даже легче, чем «сверху вниз». Впрочем, можно обойтись и без использования интеллекта:

$$x-y=\varphi_{2k+1}\varphi_{2k}-\varphi_{2k-1}\varphi_{2k}=(\varphi_{2k+1}-\varphi_{2k-1})\varphi_{2k}=\varphi_{2k}^2$$

и

$$x-y+1=\varphi_{2k}^2+1,$$

так что

$$(x-y+1)(x-y)=(\varphi_{2k}^2+1)\varphi_{2k}^2=\varphi_{2k}\varphi_{2k+1}\varphi_{2k-1}\varphi_{2k}=xy.$$

(Мы воспользовались тождеством $\varphi_{2k}^2+1=\varphi_{2k+1}\varphi_{2k-1}$, которое является частным случаем тождества упражнения 20,а.)

Мы решили уравнение

$$(x-y+1)(x-y)=xy,$$

применив довольно неожиданный трюк. Но есть и другой – стандартный – способ. А именно, есть стандартная схема, по которой решают в целых числах уравнения второй степени. Давайте посмотрим, как эта схема работает. Первым делом раскроем скобки и приведем подобные:

$$x^2-3xy+y^2+x-y=0.$$

Теперь освободимся от членов первой степени. Для этого выполним замену $x = X + a$, $y = Y + b$, получив уравнение

$$X^2+2aX+a^2-3XY-3aY-3bX-3ab+Y^2+$$
$$+2bY+b^2+X+a-Y-b=0,$$

и приравняем коэффициенты при X и Y к нулю:

$$\begin{cases}2a-3b+1=0,\\ -3a+2b-1=0.\end{cases}$$

Решив эту систему, находим $a = -1/5$ и $b = 1/5$. При этих значениях a и b уравнение принимает вид

$$X^2-3XY+Y^2=\frac{1}{5},$$

где $X=x+\frac{1}{5}$ и $Y=y-\frac{1}{5}$. Домножив обе части уравнения на 20, получаем

$$20X^2-60XY+20Y^2=4,$$

$$5\left(4X^2-12XY+9Y^2\right)-25Y^2=4,$$

$$(5Y)^2-5(2X-3Y)^2=-4,$$

$$z^2-5t^2=-4,$$

где $z = 5Y = 5y - 1$ и $t = 2X - 3Y = 2x - 3y + 1$.

Пора воспользоваться следствием из теоремы 7. А именно, *все решения уравнения* $z^2-5t^2=\pm4$ *в натуральных числах даются формулой* $(z;t)=(\varphi_{n+1}+\varphi_{n-1};\varphi_n)$. При этом знаку «+» соответствуют четные n, а знаку «−» – нечетные. Осталось понять, при каких нечетных n число $z=\varphi_{n+1}+\varphi_{n-1}$ дает остаток 4 при делении на 5. Выпишем остатки от деления нескольких первых чисел Фибоначчи на 5:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
φ_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
$\varphi_n \bmod 5$	1	1	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2
$\varphi_{n-1}+\varphi_{n+1} \bmod 5$	1	3	**4**	2	1	3	**4**	2	1	3	**4**	2	1	

Закономерность очевидна: $n\equiv 3\pmod 4$.

Итак, $y=\frac{z+1}{5}=\frac{\varphi_{n-1}+\varphi_{n+1}+1}{5}$ и

$$x=\frac{t+3y-1}{2}=\frac{\varphi_n+3\frac{\varphi_{n-1}+\varphi_{n+1}+1}{5}-1}{2}=$$
$$=\frac{\varphi_{n+1}+\varphi_{n+3}-1}{5},$$

где $n\equiv 3\pmod 4$. Обозначив $n = 4k - 1$, запишем эти формулы в виде $x=\frac{\varphi_{4k}+\varphi_{4k+2}-1}{5}=\varphi_{2k}\varphi_{2k+1}$ и