Арифметические текстовые задачи на конкурсном экзамене

И. ШАРЫГИН

— Это задача, собственно говоря, алгебраическая, — говорит он. — Ее с иксом и игреком решить можно.

— И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая.

— Вот-с... по-нашему, по-неученому.

А. П. Чехов. Репетитор

Давным-давно, в доброе старое время, любили в школе текстовые арифметические задачи. Методам их решения, зачастую весьма изощренным, учили долго и тщательно, и умения эти сохранялись на всю жизнь. При этом школа не только учила методам, но и воспитывала вкус – арифметическое решение считалось более красивым, чем алгебраическое. Впрочем, и сегодня для любого мало-мальски математически воспитанного человека арифметические решения алгебраических задач, равно как и геометрические решения задач по геометрии, выглядят куда как привлекательнее алгебраических решений.

Здесь самое время вспомнить задачу, поставившую в тупик репетитора Егора Зиберова.

Задача 1. *«Купец купил 138 арш. черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?»*

По всей видимости, Удодов-старший решал ее следующим образом. 138 арш. черного сукна стоят $138 \cdot 3 = 414$ руб. Разница $540 - 414 = 126$ руб. получается за счет синего, каждый метр которого на 2 руб. дороже. Следовательно, синего сукна было $126:2 = 63$ арш., а черного было $138 - 63 = 75$ арш.

Интересно, что будет, если подобную задачу дать на конкурсном экзамене? Нет, мы не сомневаемся в том, что… впрочем, лучше сказать – мы надеемся на то, что подавляющее большинство абитуриентов успешно справится с этой задачей. Но вряд ли найдется хотя бы одно решение, подобное приведенному. У некоторых даже возникнет вопрос: а разве так можно? Вся выучка выпускника восстает против таких решений. Лучше, во всяком случае спокойнее, решать эту задачу как обычно с «иксом» и «игреком».

Тем не менее, изредка на конкурсных экзаменах встречаются текстовые задачи, предполагающие именно арифметические решения. Кроме того, бывают ситуации, когда здравые арифметические соображения могут существенно упростить процесс решения. О такого рода задачах мы и расскажем в этой статье.

Опубликовано в «Кванте» №3 за 1990 год.

Задача 2. *На реке расположены пункты A и B, причем B ниже по течению на расстоянии 20 км от A. Катер направляется из A в B, затем сразу возвращается в A и снова следует в B. Одновременно с катером из A отправился плот. При возвращении из B катер встретил плот в 4 км от A. На каком расстоянии от A катер нагонит плот, следуя вторично в B?*

Решение. Заметим, что катер удаляется от плота или приближается к нему с одной и той же скоростью – своей скоростью относительно воды. Следовательно, время, которое катер плыл от A до B, удаляясь от плота, равно времени, которое катер плыл от B до встречи с плотом. Значит, отношение путей, пройденных катером от A до B и от B до плота, равно отношению его скоростей по и против течения, т. е. отношение скоростей равно $20/16 = 5/4$. Таким же и по тем же соображениям будет отношение путей, пройденных катером от A до второй встречи с плотом и от первой встречи до A. Таким образом, катер нагонит плот в 5 км от A.

Задача 3. *На реке расположены пункты A и B. Одновременно из этих пунктов навстречу друг другу отходят два одинаковых катера, которые встречаются в некотором пункте, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Катер, вышедший из A, возвращается обратно через 1 ч после выхода. Если бы катер, отправляющийся из A, вышел на 15 мин раньше катера, отправляющегося из B, то встреча произошла бы на равных расстояниях от обоих пунктов. Через сколько времени возвращается обратно катер, выходящий из пункта B?*

Решение. Заметим, что момент возвращения катера в A полностью определяется лишь моментом выхода катера из B, равно как и возвращение катера в B определяется моментом выхода катера из A. Чтобы понять это, достаточно представить себе, что в точке встречи они не обмениваются почтой, а продолжают движение в противоположный пункт. Следовательно, во второй раз катер, вышедший из A, вернулся бы обратно через 1 ч 15 мин после выхода, т. е. на половину пути из A в B и обратно ему нужно 1 ч 15 мин, а на весь путь 2 ч 30 мин. Таким образом, катер, выходящий из B, возвращается обратно через 1 ч 30 мин.

Во многих сборниках конкурсных задач можно встретить следующую задачу.

Задача 4. *Имеются два слитка с массами m кг и n кг с различным процентным содержанием меди. От каждого слитка отделяется кусок, причем эти куски имеют равную массу, и сплавляется с оставшейся частью другого слитка. Какой массы куски следует отрезать от каждого слитка, чтобы процентное содержание меди в новых слитках было равным?*

Решение. Безусловно, эта задача легко решается стандартным образом при помощи уравнений. Правда, при этом надо не испугаться того, что число неизвестных (три) будет больше числа уравнений (одно). Как ни странно, более общим методом решения в данном случае будет арифметический. Более общим в том смысле, что он безболезненно проходит для любого числа слитков, в то время как алгебраический метод приводит к громоздким, трудно обозримым вычислениям.

На самом деле данная задача – обычная арифметическая задача «на части». В каждый из вновь образовавшихся слитков части исходных должны войти в отношении $m{:}n$. (Подумайте, почему.) Значит, в новом слитке массой в m кг содержится m равных частей из первого слитка (массой m кг) и n таких же частей из второго слитка. Масса одной части равна $\frac{m}{m+n}$ кг. Остаток от первого слитка в этом новом слитке равен $\frac{m}{m+n}m=\frac{m^2}{m+n}$ кг, а отрезанная часть второго равна $\frac{mn}{m+n}$ кг. Такую же часть надо отрезать от первого слитка.

Рассмотрим теперь несколько задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в вузы.

Задача 5. *Пятеро благородных рыбаков занимались ловлей рыбы. По окончании лова первому показалось, что он поймал больше остальных, и он разделил между ними поровну 1/3 своей добычи. После этого стало ясно, что у второго оказалось больше рыбы, чем у остальных, и он разделил между всеми остальными поровну 1/3 всей оказавшейся у него рыбы. Известно, что общий улов составлял 6 кг 400 г и что в результате описанных процедур он разделился поровну. Определите первоначальный улов каждого из рыбаков.*

Решение. Данная задача – типичный пример арифметической задачи, решаемой с конца. В конце у каждого рыбака оказалось по 1 кг 280 г рыбы. Значит, у второго рыбака, перед тем как он делился с остальными, было в 3/2 раза больше рыбы, а именно 1 кг 920 г. Следовательно, у каждого из четырех оставшихся рыбаков в это время было по 1 кг 280 г – 640 г : 4 = 1 кг 120 г. Рассуждая таким же образом, найдем, что улов первого рыбака равнялся 1 кг 680 г, второго – 1 кг 780 г, а у каждого из трех оставшихся – по 980 г.

Задача 6. *В порту для загрузки танкеров имеются три трубопровода. По первому из них закачивается в час 300 тонн нефти, по второму – 400 тонн, по третьему – 500 тонн. Нужно загрузить два танкера. Если загрузку производить первыми двумя трубопроводами, подключив к одному из танкеров первый трубопровод, а к другому танкеру второй трубопровод, то загрузка обоих танкеров при наиболее быстром из двух возможных способов подключения займет 12 часов. При этом какой-то из танкеров, может быть, окажется заполненным раньше, и тогда подключенный к нему трубопровод отключается и в дальнейшей загрузке не используется. Если бы вместимость меньшего по объему танкера была вдвое больше, чем на самом деле, и загрузка производилась бы вторым и третьим трубопроводами, то при быстрейшем способе подключения загрузка заняла бы 14 часов. Определите, сколько тонн нефти вмещает каждый из танкеров.*

Решение. Очевидно, что более производительный трубопровод следует подключить к танкеру с большей вместимостью. Поскольку один из двух танкеров был заполнен ровно за 12 часов, то либо меньший вмещает $12\cdot300=3600$ тонн нефти, либо больший $12\cdot400=4800$ тонн. Первый случай невозможен, так как при удвоении вместимости меньшего танкера получаем 7200 тонн, а для заполнения такого танкера даже третьим трубопроводом требуется более 14 часов. Следовательно, больший танкер вмещает 4800 тонн и заполняется вторым и, тем более, третьим трубопроводом быстрее чем за 14 часов. Значит, меньший танкер вмещает $\frac{1}{2}\cdot14\cdot500=3500$ тонн.

Самое главное в этой задаче – не испугаться громоздкого условия, подойти к ней с позиции обычного здравого смысла.

Минимальный здравый смысл и понимание, что такое «процент», – вот все необходимое для решения следующей задачи.

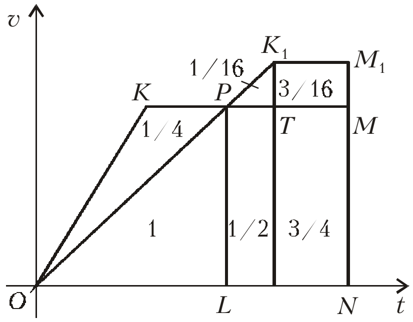
Задача 7. *В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа членов группы, принявших участие в кроссе, заключен в пределах от 96,8% до 97,2%. Определите минимально возможное число членов такой группы.*

Решение. Процент не участвовавших в кроссе заключен в пределах от 2,8% до 3,2%. Если бы в кроссе не участвовал 1 человек (меньше уже нельзя), то число членов группы заключалось бы в пределах от $1\cdot\frac{100}{2{,}8}=35{,}7\ldots$ до $1\cdot\frac{100}{3{,}2}=$ $=31{,}2\ldots$, т.е. минимальное число членов группы будет 32 человека. Понятно, что при меньшем числе членов группы 3,2% от этого числа будет меньше 1, а по условию в кроссе не участвовал по крайней мере один человек.

Следующая задача не совсем соответствует теме статьи, поскольку при ее решении больше используются геометрические, чем арифметические методы. Мы включили ее по двум причинам. Во-первых, при ее решении не используются ни уравнения, ни другие соотношения, содержащие неизвестные. Во-вторых, здесь иллюстрируется один весьма полезный метод решения задач на движение – графическая интерпретация.

Задача 8. *Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения различны), а затем, достигнув некоторой скорости, – равномерно. Отношения скоростей равномерного движения поездов равно 5/4. В некоторый момент времени скорости поездов оказались равными, а один из них прошел к этому времени расстояние в 5/4 раза больше, чем другой. В пункты B и A поезда прибыли одновременно. Какую часть пути прошел каждый из поездов к тому моменту, когда их скорости оказались равными?*

Решение. Рассмотрим графики, изображающие зависимость скорости от времени для каждого поезда. При этом можно считать, что оба поезда вышли из одного пункта. Для одного поезда графиком является ломаная OKM, для другого – OK_1M_1 (см. рисунок). Длина пройденного пути к определенному моменту времени одним из поездов равна площади фигуры, ограниченной снизу отрезком оси t и соответствующей частью графика его скорости сверху. По условию площади трапеций $OKMN$ и OK_1M_1N равны, значит, равновелики и фигуры OKP и PK_1M_1M. Площадь $OKPL$ равна 5/4 площади OPL (по условию). Если площадь OPL равна 1, то площадь OKP есть 1/4; площадь



PK_1T равна 1/16, поскольку $K_1T = \frac{1}{4}PL$ (по условию отношение скоростей равномерного движения равно 5/4, т.е. $M_1N = \frac{5}{4}PL$), а треугольники OPL и PK_1T подобны. Далее из равновеликости OKP и PK_1M_1M находим площадь прямоугольника TK_1M_1M. Она равна $\frac{3}{16}$. Затем находим площади двух оставшихся прямоугольников. Весь путь (он равен площади $OKMN$ или OK_1M_1N) равен $2\frac{1}{2}$. Поскольку площади трапеции $OKPL$ и треугольника OPL соответственно равны $\frac{5}{4}$ и 1, то в момент равенства скоростей (точка P) один поезд прошел $\frac{1}{2}$ пути, а другой – $\frac{2}{5}$.

И в заключение рассмотрим задачу, которая, по существу, является арифметической, поскольку решение основано на свойствах делимости натуральных чисел, хотя для удобства мы все же введем неизвестные. По содержанию эта задача скорее олимпиадная, чем конкурсная.

Задача 9. *У восьми школьников в сумме имеется 719 руб. Известно, что у любых двух из них различные суммы денег, но у одного из них в целое число раз больше денег, чем у другого. Сколько денег у каждого школьника?*

Решение. Пусть x_1 – наименьшая сумма, x_1x_2 – вторая по величине, ..., $x_1x_2\ldots x_8$ – наибольшая сумма. По условию $x_i \neq 1$ при $i > 1$, $x_1 + x_1x_2 + \ldots + x_1x_2\ldots x_8 = 719$. 719 – число простое, следовательно, $x_1 = 1$. Далее имеем $x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_2x_3\ldots x_8 = 718 = 2\cdot 359$. Таким образом, $x_2 = 2$. Затем получим $x_3 = x_4 = 2$ и $x_5 + x_5x_6 + x_5x_6x_7 + x_5x_6x_7x_8 = 88\cdot x_5$ – делитель 88. Если $x_5 = 2$, то $x_6 + x_6x_7 + x_6x_7x_8 = 43$. 43 – число простое, а $x_6 \neq 1$, значит, $x_5 \neq 2$. При $x_5 = 4$ найдем $x_6 = 3$, $x_7 = x_8 = 2$. Другие значения x_5 не подойдут.

Итак, школьники имели 1, 2, 4, 8, 32, 96, 192, 384 рубля соответственно.

Задачи для самостоятельного решения

1. На овощной базе имелся крыжовник, влажность которого составляла 99%. За время хранения его влажность уменьшилась на 1% (стала 98%). На сколько процентов уменьшилась масса хранившегося на базе крыжовника?

2. Автомобиль проезжает путь от A до B за 1 час. Автомобиль выехал из A, и одновременно из B вышел пешеход. Автомобиль встретил пешехода, довез его до A и затем прибыл в B, затратив на весь путь 2 ч 40 мин. За какое время может пройти весь путь от B до A пешеход?

3. Теплоход проходит путь от A до B по течению за 3 часа, а возвращается обратно за 4 часа. За какое время преодолеют путь от A до B плывущие со скоростью течения плоты?

4. Поезд, следующий из пункта A в пункт B, делает по пути несколько остановок. На первой остановке в поезд садятся 5 пассажиров, а на каждой следующей – на 10 пассажиров больше. На каждой остановке 50 пассажиров выходят из поезда. Возможен ли случай, когда в пункт B прибывает менее 336 пассажиров, если из пункта A их выезжает 462?

5. В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа участников кросса, не уложившихся в норматив, заключен от 94,2% до 94,4%. Каково наименьшее число участников кросса?

6. Автобус на пути из A в B делает 5 остановок по 10 мин через каждые 16 км (расстояние от A до B равно 96 км), скорость автобуса равна 65 км/ч. Одновременно с автобусом из B навстречу ему выезжает велосипедист со скоростью 21 км/ч. На каком расстоянии от A автобус встретится с велосипедистом?

7. Пассажирский поезд проходит мимо столба за 6 секунд. За какое время пройдут друг мимо друга скорый и пассажирский поезда, если скорость скорого поезда в 3/2 раза больше скорости пассажирского, а длина пассажирского в 4/3 раза больше длины скорого?

8. Работа началась между 9 и 10 часами утра, а закончилась между 15 и 16 часами того же дня. Определите продолжительность работы, если в момент начала и в момент окончания работы минутная и часовая стрелки были перпендикулярны.

9. Один рабочий может изготовить партию деталей за 12 часов. Работу начал один рабочий, через 1 час к нему присоединился второй, еще через час – третий и т.д., пока работа не была выполнена. Сколько времени проработал первый рабочий? (Производительность труда всех рабочих одинакова.)

10. Имеются три слитка массой 2, 3 и 5 кг с различным содержанием меди. Каждый слиток разделен на три части, и из девяти кусков получены три слитка массой 2, 3 и 5 кг с равным содержанием меди. На какие части следует разделить исходные слитки, чтобы гарантировать равное процентное содержание меди в получившихся слитках независимо от содержания ее в исходных слитках?

11. Три школьника делят между собой орехи. Сначала первый школьник дал каждому из двух других по одной четверти имевшихся у него орехов и еще пол-ореха. Затем второй дал каждому из двух других по одной четверти оказавшихся у него орехов и еще пол-ореха. Затем то же сделал третий школьник. В результате у каждого оказалось по 30 орехов. Сколько орехов было у каждого школьника ?

12. Имеются два сосуда. В одном содержится 3 л 100%-й кислоты, а в другом – 2 л воды. Из первого сосуда во второй перелили один стакан кислоты, а затем из второго в первый – один стакан смеси. Эту операцию повторили еще три раза. В результате во втором сосуде оказалась кислота крепостью 42%. Сколько процентов кислоты содержится теперь в первом сосуде?

13. Пункт B находится выше по течению, чем пункт A, на расстоянии 4,5 км от A. Скорость течения реки 3 км/ч. Двигаясь в стоячей воде, гребец идет со скоростью 5 км/ч. Гребец вышел из A, доплыл до B и вернулся в A. Через равные промежутки времени гребец отдыхал в течение 10 мин (в это время лодка плывет по течению), а всего таких перерывов оказалось 8. Через сколько времени гребец вернулся обратно в A?