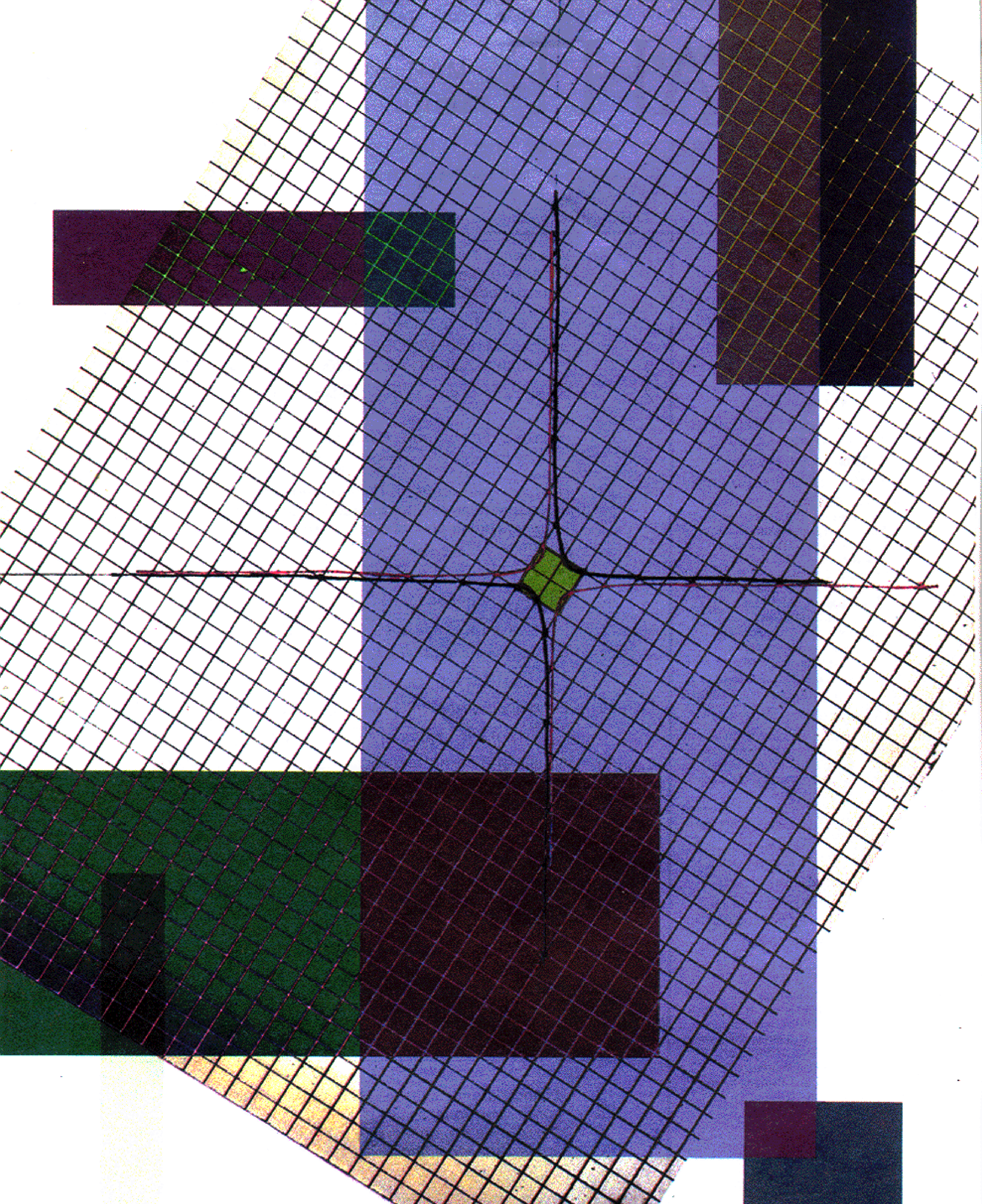

Уравнения Пелля

В.СЕНДЕРОВ, А.СПИВАК

Всякое уравнение, имеющее несколько переменных, подлежит исследованию теории чисел. Но не все они одинаково доступны исследованию и не все имеют одинаковую важность по приложениям своим. Теория чисел до сих пор ограничивается только рассмотрением уравнений, наиболее простых и в то же время имеющих наиболее важные приложения.

П.Л.Чебышёв

Напишем уравнение и спросим, имеет ли оно решение в целых числах, – получится задача. Скорее всего, если уравнение взято «просто так», эта задача будет очень трудной (или вообще не поддастся решению), а главное, не будет никому интересна. Но есть уравнения, знакомство с которыми неизбежно и в высшей степени полезно для всякого, кто интересуется математикой. Именно таковы уравнения Пелля:

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

где d – натуральное число, не являющееся точным квадратом.

Почему «не являющееся точным квадратом»? Потому что левую часть уравнения

$$x^2 - a^2y^2 = 1,$$

где a – натуральное число, можно разложить на множители:

$$(x - ay)(x + ay) = 1.$$

Число 1 можно представить в виде произведения двух целых чисел двумя способами: $1 \cdot 1$ и $-1 \cdot (-1)$. В первом случае $x - ay = 1$ и $x + ay = 1$, откуда $x = 1$ и $y = 0$. Во втором случае $x - ay = -1$ и $x + ay = -1$, откуда $x = -1$ и $y = 0$.

Итак, уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где $d = a^2$, решить очень легко. Ничего особенно интересного в нем нет – мы всего лишь разложили на множители разность квадратов. Действительно поразительные эффекты обнаружатся, когда d не будет точным квадратом.

Уравнениями Пелля можно заниматься по-разному. Что-то может понять даже семиклассник. Интересны эти уравнения и для студента мехмата МГУ – например, очень важная для математики 10-я проблема Гильберта, поставленная в августе 1900-го года в докладе на Международном математическом конгрессе в Париже, была решена в 1970 году Ю. Матиясевичем при помощи уравнений типа уравнений Пелля.

В этой статье будет рассказано как о самых простых свойствах решений уравнений Пелля, так и о весьма серьезных и трудных теоремах и задачах, связанных с этими замечательными уравнениями.

Несколько примеров

Уравнение $x^2 - 2y^2 = \pm 1$

Рассмотрим уравнение

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1.$$

Не удивляйтесь тому, что в правой части не 1, а ± 1. Поверьте, что так легче догадаться до закономерности, о которой вскоре пойдет речь.

Подбором найдем несколько решений: $(x; y) = (1; 0)$, $(1; 1)$ или $(3; 2)$. Продолжая вычисления, составим таблицу:

x	1	1	3	7	17	41	99	239
y	0	1	2	5	12	29	70	169
$x^2 - 2y^2$	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1

Если присмотреться, то можно заметить, что каждый следующий столбец получается из предыдущего по простому правилу: «новое» значение y есть сумма «старых» x и y, а «новое» значение x есть сумма «старого» и «нового» значений y. Точнее,

$$\begin{cases} X = x + 2y, \\ Y = x + y. \end{cases}$$

Конечно, таблицы с несколькими первыми решениями недостаточно для того, чтобы быть уверенным в справедливости этих формул для всего множества решений уравнения; мы должны доказать следующие утверждения.

Теорема 1. *Если* $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, *то пара чисел* $(X; Y) = (x + 2y; x + y)$ *удовлетворяет равенству* $X^2 - 2Y^2 = \mp 1$.

Следствие. *Уравнение* $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ *имеет бесконечно много решений в натуральных числах.*

Теорема 2. *Уравнение* $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ *не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения* $(1; 0)$ *при помощи правила* $(x; y) \to (x + 2y; x + y)$.

Доказать теорему 1 очень легко: достаточно подста-

Иллюстрация В.Хлебниковой

вить значения X и Y вместо x и y. А именно,

$$(x+2y)^2 - 2(x+y)^2 =$$
$$= x^2 + 4xy + 4y^2 - 2\left(x^2 + 2xy + y^2\right) =$$
$$= 2y^2 - x^2 = -\left(x^2 - 2y^2\right).$$

Как видите, если $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, то $X^2 - 2Y^2 = \mp 1$. Теорема 1 доказана, мы научились строить «новое» решение из «старого».

А вот доказательство теоремы 2 хотя и не очень сложно, но требует привлечения идеи, которая слишком важна, чтобы говорить о ней мимоходом. Поэтому мы займемся этим позже, а пока посмотрим, как для решения уравнения Пелля можно использовать иррациональные числа.

Упражнения

1. Рассмотрим последовательности $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$, $x_4 = 17$, … и $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 5$, $y_4 = 12$, …, заданные своими первыми членами $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ и рекуррентными соотношениями $x_{n+1} = x_n + 2y_n$ и $y_{n+1} = x_n + y_n$. Докажите, что $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$ и $y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n$.

2. По правилам новомодного танца надо делать либо шаг вперед, либо два шага вперед, либо два шага вперед и сразу же шаг назад. Сколькими способами танцор может за несколько таких па сдвинуться на 7 шагов от исходного рубежа?

Степени числа $1+\sqrt{2}$

Если d не является квадратом натурального числа, то в разложении

$$x^2 - dy^2 = \left(x - y\sqrt{d}\right)\left(x + y\sqrt{d}\right)$$

участвует иррациональное число $\sqrt{d}$. Казалось бы, мы решаем уравнения в целых числах; зачем нам иррациональности?

Но заметьте:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2},$$
$$\left(1+\sqrt{2}\right)^3 = 1 + 3\sqrt{2} + 3\cdot 2 + 2\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2}.$$

Узнали? Это же решения (3; 2) и (7; 5) уравнения $x^2 - 2y^2 = \pm 1$! Если вас не убедили эти два примера, вот еще один:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^4 = \left(1+\sqrt{2}\right)^3\left(1+\sqrt{2}\right) =$$
$$= \left(7+5\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) = 17 + 12\sqrt{2}.$$

Впрочем, это всего лишь примеры. Чтобы получить доказательство, посмотрим, что происходит при переходе от n-й степени числа $1+\sqrt{2}$ к $(n+1)$-й. А именно, пусть

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2},$$

где x_n и y_n – натуральные числа. Тогда

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} = \left(1+\sqrt{2}\right)^n\left(1+\sqrt{2}\right) = \left(x_n + y_n\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) =$$
$$= x_n + y_n\sqrt{2} + x_n\sqrt{2} + 2y_n = \left(x_n + 2y_n\right) + \left(x_n + y_n\right)\sqrt{2},$$

так что $x_{n+1} = x_n + 2y_n$ и $y_{n+1} = x_n + y_n$. Знакомые формулы, не правда ли?

Что будет, если возводить в степень не $1+\sqrt{2}$, а $1-\sqrt{2}$? Смотрите:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2\sqrt{2},$$
$$\left(1-\sqrt{2}\right)^3 = 7 - 5\sqrt{2},$$
$$\left(1-\sqrt{2}\right)^4 = 17 - 12\sqrt{2},$$

и вообще,

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{2}.$$

Это легко доказать по индукции:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} = \left(1-\sqrt{2}\right)^n\left(1-\sqrt{2}\right) = \left(x_n - y_n\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) =$$
$$= x_n - y_n\sqrt{2} - x_n\sqrt{2} + 2y_n = \left(x_n + 2y_n\right) - \left(x_n + y_n\right)\sqrt{2}.$$

А можно обойтись и без индукции, заметив, что при возведении числа $1+\sqrt{2}$ в степень мы используем равенство $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$; но число $\left(-\sqrt{2}\right)^2$ тоже равно 2.

Подобные соображения в алгебре используют часто, есть даже термин: *сопряженные числа*. В полной общности это важное понятие нам не понадобится. Поэтому пока просто скажем, что для каждого числа вида $a + b\sqrt{2}$, где a, b – рациональные числа, сопряженным числом называют $a - b\sqrt{2}$. Если вы знаете, что такое комплексные числа, и помните, что для любого комплексного числа $a + bi$ сопряженное – это $a - bi$, не удивляйтесь использованию одного и того же слова для разных целей: если бы мы подробно рассказали о сопряженных числах, то все стало бы абсолютно ясно. Но это, к сожалению, слишком отвлекло бы нас от основной темы.

Тем не менее, для нас важно следующее свойство: *сопряженное к сумме (разности, произведению, частному) двух чисел равно сумме (разности, произведению, частному) сопряженных к ним*. Например, вот как выглядит это для сложения:

$$(a+c) - (b+d)\sqrt{2} = \left(a - b\sqrt{2}\right) + \left(c - d\sqrt{2}\right).$$

Чуть больших усилий потребует от нас проверка этого свойства для умножения.[1] Прежде всего вычислим произведение

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c + d\sqrt{2}\right) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

Значит, сопряженное к произведению равно $(ac + 2bd) - (ad + bc)\sqrt{2}$. Осталось вычислить произведение сопряженных:

$$\left(a - b\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right) = (ac + 2bd) - (ad + bc)\sqrt{2}.$$

Как видите, результат получился тот же самый.

Отображение $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ называют *автоморфизмом* поля $\boldsymbol{Q}\left[\sqrt{2}\right]$. А произведение

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a - b\sqrt{2}\right) = a^2 - 2b^2$$

[1] *Строго говоря, надо бы еще разобраться с разностью и частным, но не будем тратить на это силы: при желании вы легко сделаете это самостоятельно.*

называют *нормой* числа $a+b\sqrt{2}$. Очень многое из того, что мы расскажем об уравнениях Пелля, можно перенести на случай так называемого норменного уравнения в полях алгебраических чисел. Но мы слишком увлеклись. Порекомендовав заинтересованному читателю когда-нибудь изучить «Теорию чисел» З.И.Боревича и И.Р.Шафаревича, вернемся к нашим делам.

Упражнение 3. Пусть a, b – целые числа, d – натуральное число, не являющееся квадратом, $x+y\sqrt{d}=\dfrac{1}{a+b\sqrt{d}}$. Докажите, что числа x и y целые в том и только том случае, когда $a^2-db^2=\pm1$.

Сложив равенства

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^n=x_n+y_n\sqrt{2}$$

и

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^n=x_n-y_n\sqrt{2}$$

и поделив на 2, находим

$$x_n=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2}.$$

А если не сложить, а вычесть, то получим

$$y_n=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n-\left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}.$$

Это и есть не рекуррентные (когда каждую следующую пару получаем из предыдущей), а явные формулы решений уравнения $x^2-2y^2=\pm1$ в натуральных числах. Заметьте: натуральные x_n и y_n получаются из формул, в которые входит иррациональное число $\sqrt{2}$!

Не каждому читателю, по себе знаем, легко привыкнуть пользоваться иррациональными числами для решения уравнений в целых числах. Поэтому мы вернемся к таким рассмотрениям чуть позже, а пока продолжим рассмотрение примеров.

Упражнения

4. а) Докажите равенства $x_{2n}=2x_n^2-(-1)^n$ и $y_{2n}=2x_ny_n$. б) Если d – натуральное число, не являющееся квадратом, а z и t – натуральные числа, удовлетворяющие равенству $z^2-dt^2=1$, то натуральные числа a_n и b_n, определенные формулой $a_n+b_n\sqrt{d}=\left(z+t\sqrt{d}\right)^n$, обладают тем свойством, что $a_{2n}=2a_n^2-1$ и $b_{2n}=2a_nb_n$. Докажите это.

5. а) Для любого натурального n число $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ представимо в виде $\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$, где k – натуральное число. Докажите это. б) (М1522) Для любых натуральных m, d, n существует такое натуральное k, что $\left(\sqrt{m}+\sqrt{m+d}\right)^n=$ $=\sqrt{k}+\sqrt{k+d^n}$. Докажите это. в) Пусть m и n – натуральные числа, $n>1$. Докажите, что для некоторого натурального числа k имеем $\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m=\dfrac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$.

6. Существуют ли такие рациональные числа a, b, c, d, что $\left(a+b\sqrt{2}\right)^2+\left(c+d\sqrt{2}\right)^2=7+5\sqrt{2}$?

7(М874)**.** Пусть m и n – натуральные числа. Докажите, что а) $\left(5+3\sqrt{2}\right)^m\ne\left(3+5\sqrt{2}\right)^n$; б*) $\left(a+b\sqrt{d}\right)^m\ne\left(b+a\sqrt{d}\right)^n$, где a, b и d – натуральные числа, $a\ne b$ и число d не является точным квадратом.

8. Докажите следующие утверждения.

а) (М352) Число $\left[\left(45+\sqrt{1975}\right)^{30}\right]$ нечетно.

б) Первые 1000 цифр после запятой десятичной записи числа $\left(6+\sqrt{35}\right)^{1979}$ – девятки.

в) Первые 999 цифр после запятой десятичной записи числа $\left(6+\sqrt{37}\right)^{999}$ – нули.

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\}=1$.

д) Перед запятой в десятичной записи числа $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2000}$ стоит цифра 1, а после запятой – не менее 666 девяток. *Указание*. Для любого целого неотрицательного n обозначьте $a_n=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2n}$ и докажите равенство $a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$.

(Пункт б) предлагали в соответствующем году самым сильным абитуриентам мехмата МГУ на устном экзамене. Пункт в) предлагали в 1965 году на конкурсе ВМШ при мехмате МГУ. Пункт г) предлагали на студенческой олимпиаде 1977 года.)

9* (М520)**.** Рассмотрим последовательность чисел $x_n=\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n$. Каждое из них можно привести к виду $x_n=q_n+r_n\sqrt{2}+s_n\sqrt{3}+t_n\sqrt{6}$, где q_n, r_n, s_n, t_n – целые числа. Найдите пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_n}{q_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{s_n}{q_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{t_n}{q_n}$.

Уравнение $x^2+(x+1)^2=y^2$

Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 обладает тем свойством, что один из его катетов на 1 длиннее другого. Много ли еще таких треугольников, точнее, много ли решений в натуральных числах имеет уравнение $x^2+(x+1)^2=y^2$? Чтобы ответить на этот вопрос, раскроем скобки и приведем подобные:

$$2x^2+2x+1=y^2.$$

Теперь, домножив обе части на 2, выделим полный квадрат:

$$(2x+1)^2+1=2y^2.$$

Обозначив $z=2x+1$, получим уравнение

$$z^2-2y^2=-1.$$

Любое удовлетворяющее последнему уравнению число z нечетно. Поэтому мы свели задачу к уравнению $z^2-2y^2=-1$, где y, z – натуральные числа, причем $z>1$.

Как мы помним, если $z^2-2y^2=-1$, то

$$(z+2y)^2-2(z+y)^2=1.$$

В правой части теперь находится 1, а не −1. Мы умеем переходить от 1 к −1: для любого решения $(a;\ b)$ уравнения $a^2-2b^2=1$ выполнено равенство

$$(a+2b)^2-2(a+b)^2=-1.$$

Следовательно, из любой пары натуральных чисел $(z;\ y)$, удовлетворяющей равенству $z^2-2y^2=-1$, мы можем получить новую пару:

$$Z = (z + 2y) + 2(z + y) = 3z + 4y,$$
$$Y = (z + 2y) + (z + y) = 2z + 3y,$$

удовлетворяющую равенству $Z^2 - 2Y^2 = -1$. Давайте проверим это:

$$(3z + 4y)^2 - 2(2z + 3y)^2 = 9z^2 + 24zy + 16y^2 - $$
$$- 2\left(4z^2 + 12zy + 9y^2\right) = z^2 - 2y^2.$$

(Никакой логической необходимости в последней проверке нет. Но, согласитесь, приятно убедиться, что мы не ошиблись в вычислениях.)

Упражнения

10. а) Найдите некоторые три решения в натуральных числах уравнения $x^2 + (x+1)^2 = y^2$. б) Придумайте такие натуральные числа a, b, c, d, e, f, что для всякого решения x, y уравнения $x^2 + (x+1)^2 = y^2$ верно равенство $(ax + by + c)^2 + (ax + by + c + 1)^2 = (dx + ey + f)^2$.

11. Существует бесконечно много различных прямоугольных треугольников, каждый из которых обладает следующими свойствами: длины сторон – целые числа, длина гипотенузы – квадрат целого числа, а один из катетов на единицу короче гипотенузы. Докажите это.

Уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$

При помощи многократно примененного перехода $(x;y) \to (3x + 4y; 2x + 3y)$ из решения (1; 0) получаются решения (3; 2), (17; 12), (99; 70), ... уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$. Например,

$$99 = 3 \cdot 17 + 4 \cdot 12,$$
$$70 = 2 \cdot 17 + 3 \cdot 12.$$

Таким образом, уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$, как и уравнение $x^2 - 2y^2 = -1$, имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Если бы мы уже доказали теорему 2, то могли бы утверждать, что эти уравнения не имеют никаких других решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «начального» решения $(x;y) = (1;0)$ или $(1;1)$ при помощи правила $(x;y) \to (3x + 4y; 2x + 3y)$. Но пока теорема 2 не доказана, торопиться с этим не стоит.

Упражнения

12. Существует ли такой многочлен второй степени f, что среди его значений $f(n)$, где n – натуральное число, имеется бесконечно много квадратов натуральных чисел, а сам многочлен f не представим в виде $f = g^2$ ни для какого многочлена g?

13. Рассмотрим последовательности $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 17$, $x_3 = 99$, ... и $y_0 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 12$, $y_3 = 70$, ..., заданные своими начальными членами $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ и рекуррентными соотношениями $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$, $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$. Существуют ли такие числа a и b, что для любого натурального n верны равенства $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ и $y_{n+1} = ay_n + by_{n-1}$?

Уравнение $x^2 - 2y^2 = 7$

Правило $(x;y) \to (3x + 4y; 2x + 3y)$ позволяет из одного решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 7$ получить другое решение. Так, из решения $(x;y) = (3;1)$ получаем $(3 \cdot 3 + 4 \cdot 1; 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) = (13; 9)$, из которого получаем $(3 \cdot 13 + 4 \cdot 9; 2 \cdot 13 + 3 \cdot 9) = (75; 53)$, из которого можно получить еще одно решение, и так далее.

Привычная ситуация, скажете вы? Решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ получались из «начального» решения $(1; 0)$ при помощи этого же правила $(x; y) \to (3x + 4y; 2x + 3y)$, так что ничего нового нет? Не торопитесь:

$$5^2 - 2 \cdot 3^2 = 7.$$

Решение $(5; 3)$ не входит в цепочку

$$(3; 1) \to (13; 9) \to (75; 53) \to \ldots,$$

а порождает свою цепочку:

$$(5; 3) \to (3 \cdot 5 + 4 \cdot 3; 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3) =$$
$$= (27; 19) \to (3 \cdot 27 + 4 \cdot 19; 2 \cdot 27 + 3 \cdot 19) =$$
$$= (157; 111) \to \ldots$$

Других цепочек нет. Точнее говоря, верна следующая теорема.

Теорема 3. *Уравнение $x^2 - 2y^2 = 7$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из одного из двух «начальных» решений* (3; 1) *и* (5; 3) *при помощи правила $(x; y) \to (3x + 4y; 2x + 3y)$.*

Доказательство примерно такое же, как и доказательство теоремы 2. Поэтому мы отложим его на будущее, а пока продолжим рассмотрение примеров.

Уравнение $x^2 - 3y^2 = \pm 1$

Пара $(x; y) = (1; 0)$ удовлетворяет любому уравнению $x^2 - dy^2 = 1$. Подбором легко найти решение $x = 2$, $y = 1$ уравнения

$$x^2 - 3y^2 = 1.$$

Можно найти и решение $(x; y) = (7; 4)$, а затем и $(26; 15)$. Возможны и дальнейшие вычисления (особенно если есть калькулятор и готовность к продолжительному и не очень разумному труду). Они приводят к решению $(97; 56)$.

Здесь явно пора остановиться и подумать. Мы не нашли ни одного решения уравнения

$$x^2 - 3y^2 = -1.$$

И не потому, что плохо искали, а потому, что их нет. В самом деле, рассмотрим остаток от деления на 3 левой части уравнения $x^2 - 3y^2 = -1$. Поскольку $3y^2$ делится на 3, искомый остаток совпадает с остатком от деления x^2 на 3. Число x можно представить одной из трех формул: $x = 3k$ (если x делится на 3), $x = 3k + 1$ (если x при делении на 3 дает остаток 1) или, наконец, $x = 3k + 2$ (если остаток равен 2). При этом $x^2 = 9k^2$, $9k^2 + 6k + 1$ или $9k^2 + 12k + 4$. Остаток от деления на 3 в первом случае равен 0, а в двух других случаях остаток равен 1.

Итак, левая часть уравнения $x^2 - 3y^2 = -1$ при делении на 3 дает остаток 0 или 1, а правая – остаток 2. Мы доказали, что уравнение $x^2-3y^2=-1$ не имеет решений в целых числах.

Упражнение 14. Может ли сумма квадратов а) трех; б) четырех; в) пяти; г) шести; д) семи; е) восьми; ж) девяти; з) десяти; и) двенадцати последовательных целых чисел быть квадратом целого числа?

Уравнение $x^2 - 3y^2 = 1$

Уравнение $x^2-3y^2=1$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Чтобы доказать это, мы, как и в теореме 1, укажем формулы, которые из решения $(x;y)$ строят новое решение $(X;Y)$. А именно, пару $(1;0)$ эти формулы преобразуют в $(2;1)$, пару $(2;1)$ – в $(7;4)$, которую, в свою очередь, они преобразуют в $(26;15)$. Следующая пара, как помните, $(97;56)$.

Что же это за формулы? Немного терпения и удачи, и вы заметите, что $97=2\cdot26+3\cdot15$ и $56=26+2\cdot15$.

Впрочем, можно получить формулу $(x;y)\to(2x+3y;x+2y)$ и более «научным» способом, если использовать иррациональности. Смотрите:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3},$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^3=8+12\sqrt{3}+18+3\sqrt{3}=26+15\sqrt{3}.$$

Мы получили решения $(7;4)$ и $(26;15)$ уравнения $x^2-3y^2=1$.

Если

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n=x+y\sqrt{3},$$

то

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}=\left(x+y\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=(2x+3y)+(x+2y)\sqrt{3},$$

что и дает нужную нам формулу.

Вообще, давайте равенство

$$2^2-3=1$$

запишем в виде

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=1,$$

а затем возведем обе части в n-ю степень:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n=1.$$

Обозначив через x_n и y_n такие натуральные числа, что

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n=x_n+y_n\sqrt{3},$$

получим, заменив знаки перед $\sqrt{3}$, равенство

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^n=x_n-y_n\sqrt{3}.$$

(Переход к сопряженным числам законен по той же причине, что и для $\sqrt{2}$.) Следовательно,

$$1=\left(2+\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n=\left(x_n+y_n\sqrt{3}\right)\left(x_n-y_n\sqrt{3}\right)=x_n^2-3y_n^2.$$

Значит, пара

$$(x_n;y_n)=\left(\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2};\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}\right)$$

– решение уравнения $x^2-3y^2=1$. Других решений в натуральных числах, как следует из сформулированной ниже теоремы 5, у этого уравнения нет.

Теорема 4. *Если $x^2-3y^2=1$, то пара чисел $(X;Y)=(2x+3y;x+2y)$ удовлетворяет равенству $X^2-3Y^2=1$.*

Теорема 5. *Уравнение $x^2-3y^2=1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения $(1;0)$ при помощи правила $(x;y)\to(2x+3y;x+2y)$.*

Доказательство теоремы 5 отложим на будущее, а теорему 4 докажем:

$$(2x+3y)^2-3(x+2y)^2=4x^2+12xy+9y^2-3\left(x^2+4xy+4y^2\right)=x^2-3y^2=1.$$

Фокус вновь удался. Интересно, что мы будем делать, когда d будет не таким маленьким и догадаться до правила, которое «размножает» решения, будет сложно? Да и всегда ли такое правило существует? Не будем пока отвечать на эти законные вопросы. Подождите – вскоре и это, и многое другое прояснится.

Упражнения

15. Докажите следующие утверждения.

а) Уравнение $(x+1)^3-x^3=y^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

б) (М960) Если квадрат некоторого натурального числа n представим в виде разности кубов последовательных целых чисел, то число n есть сумма квадратов двух последовательных целых чисел.

в) Уравнение $(x+2)^3-x^3=y^2$ не имеет решений в целых числах.

16. Если натуральные числа k, m и n удовлетворяют равенству $m+n\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^k$, где k а) нечетно; б) четно, то число а) $\sqrt{m-1}$; б) $\sqrt{(m+1)/2}$ целое. Докажите это.

17. а) Пусть p – простое число и $x^2-py^2=1$, где x, y – натуральные числа. Докажите, что если x (не)четно, то одно из чисел $x-1$ или $x+1$ является (удвоенным) квадратом.

б) Существуют ли такие натуральные числа x, y, d, что $x^2-dy^2=1$ и ни одно из чисел $x-1$ и $x+1$ не является ни квадратом, ни удвоенным квадратом?

18. Пусть n – целое неотрицательное число. Докажите, что число $\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n+1}\right]$ делится на 2^{n+1} и не делится на 2^{n+2}.

Гиперболы и решетки

Мы уже долго занимаемся алгеброй и арифметикой. Наверное, стоит чуть отвлечься на геометрию – там тоже встречаются интересные для нас явления. В «Задачнике «Кванта» недавно опубликована следующая задача Н.Осипова.

М1775. а) *Существует ли квадрат, все вершины и все середины сторон которого лежат на гиперболах $xy=\pm1$?*

б) *Докажите, что существует бесконечно много параллелограммов, одна из вершин каждого из которых – начало координат, две другие лежат на гиперболе $xy=1$, а четвертая – на гиперболе $xy=-1$.*

в) *Докажите, что площадь любого такого параллелограмма равна $\sqrt{5}$.*

г) *Рассмотрим для некоторого такого параллелограмма OABC порожденную им решетку, т.е. множество таких точек P, что* $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OC}$, *где m, n – целые числа. Докажите, что внутренность «креста», ограниченного гиперболами* $xy = \pm 1$, *содержит лишь одну точку этой решетки – начало координат.*

В авторском варианте задача имела продолжение: *а на самих гиперболах* $xy = \pm 1$ *лежит бесконечно много точек решетки*! Редакция вычеркнула это, убоявшись, что задача покажется читателю слишком сложной. Но мы, разумеется, решим и неопубликованный пункт.

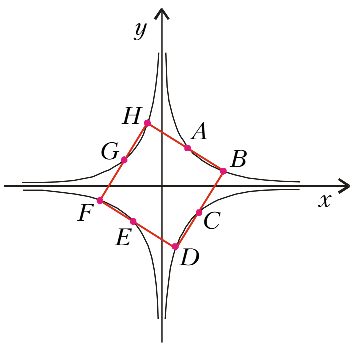

Рис.1

Решение задачи М1775. а) Проанализируем ситуацию. Пусть искомый квадрат существует и выглядит так, как показано на рисунке 1. Обозначим координаты точки A – середины стороны квадрата – через $\left(a; \frac{1}{a}\right)$. Тогда, как легко видеть, $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{a}; -a\right)$, так что точка B имеет координаты $\left(a + \frac{1}{a}; \frac{1}{a} - a\right)$. Условие принадлежности точки B гиперболе $xy = 1$ дает уравнение

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a} - a\right) = 1,$$

откуда $\frac{1}{a^2} - a^2 = 1$. Этому уравнению удовлетворяет число $a = \sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)/2}$. Анализ окончен.

Теперь легко предъявить искомый квадрат: при найденном значении a все четыре точки $B\left(a + \frac{1}{a}; \frac{1}{a} - a\right)$, $D\left(-a + \frac{1}{a}; -\frac{1}{a} - a\right)$, $F\left(-a - \frac{1}{a}; -\frac{1}{a} + a\right)$, $H\left(a - \frac{1}{a}; \frac{1}{a} + a\right)$ (вершины квадрата) и точки $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$, $C\left(\frac{1}{a}; -a\right)$, $E\left(-a; -\frac{1}{a}\right)$, $G\left(-\frac{1}{a}; a\right)$ (середины сторон) лежат на гиперболах $xy = \pm 1$.

Упражнение 19. Докажите, что если все вершины и все середины сторон квадрата лежат на гиперболах $xy = \pm 1$, то центр этого квадрата – начало координат.

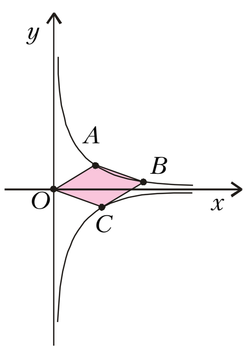

Рис.2

б) Рассмотрим точки $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $C\left(c; -\frac{1}{c}\right)$, а также начало координат $O(0; 0)$ (рис.2). Вершина B параллелограмма $OABC$ имеет координаты $\left(a + c; \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)$. Она лежит на гиперболе $xy = 1$ при условии

$$(a + c)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) = 1,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{c}{a} - \frac{a}{c} = 1,$$

т.е.

$$\frac{c}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Осталось заметить, что последнему условию удовлетворяют бесконечно много пар чисел a и c.

в) Легко доказать, что площадь S параллелограмма $OABC$, где O – начало координат, $\overrightarrow{OA} = (a; b)$ и $\overrightarrow{OC} = (c; d)$, равна $S = |ad - bc|$. Подставляя $b = \frac{1}{a}$ и $d = -\frac{1}{c}$, находим

$$S = \left|\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right| = \left|\frac{2}{1 \pm \sqrt{5}} + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right| = \sqrt{5},$$

что и требовалось доказать.

Но решение еще не закончено! Дело в том, что параллелограмм может выглядеть так, как показано на рисунке 3. Его вершины $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $C\left(c; \frac{1}{c}\right)$ лежат на гиперболе $xy = 1$. Точка B имеет координаты $\left(a + c; \frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$. Чтобы она принадлежала гиперболе $xy = -1$, должно быть выполнено равенство

$$(a + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) = -1,$$

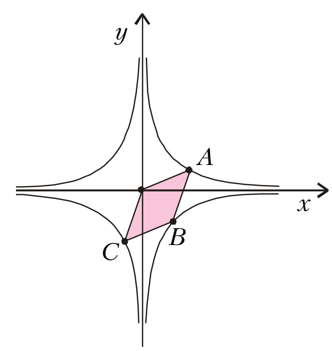

Рис.3

т.е. $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} = -3$. Площадь параллелограмма $OABC$ равна

$$S = \left|\frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + 2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 4} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 - 4} = \sqrt{(-3)^2 - 4} = \sqrt{5}.$$

г) Рассмотрим порожденную параллелограммом рисунка 2 решетку (рис.4). Для произвольной точки $P(x; y)$ этой решетки $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OC} = \left(ma + nc; \frac{m}{a} - \frac{n}{c}\right)$, где m, n – целые числа, имеем

$$|xy| = \left|(ma+nc)\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{c}\right)\right| =$$

$$= \left|m^2 + mn\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right) - n^2\right| = \left|m^2+mn-n^2\right| .$$

Внутренность «креста» из гипербол $xy = \pm 1$ задается неравенством $|xy| < 1$. Но при целых m и n величина $\left|m^2+mn-n^2\right|$ тоже целая. Единственным целым числом, которое по модулю меньше 1, является ноль. Значит, для лежащей внутри креста точки решетки имеем

$$\left|(ma+nc)\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{c}\right)\right| = 0,$$

откуда $ma + nc = 0$ или $mc - na = 0$. Ввиду иррациональности отношения a/c это возможно лишь при $m = n = 0$.

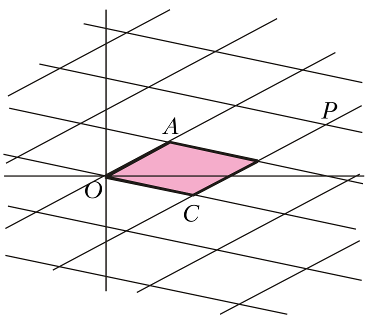

Рис.4

Значит, внутри «креста» из гипербол расположена единственная точка рассматриваемой решетки – начало координат.

Для решетки, порожденной параллелограммом рисунка 3, решение аналогично, поэтому мы выпишем только формулы

$$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OC} = \left(ma+nc; \frac{m}{a}+\frac{n}{c}\right)$$

и

$$|xy| = \left|(ma+nc)\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{c}\right)\right| = \left|m^2 + mn\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+n^2\right| =$$

$$= \left|m^2 - 3mn + n^2\right| = \left|(m-n)^2 - (m-n)n - n^2\right| =$$

$$= \left|k^2 - kn - n^2\right| ,$$

где обозначено $k = m - n$.

Итак, внутри «креста гипербол» нет ни одной точки решеток, кроме начала координат. А на самих гиперболах таких точек бесконечно много. Чтобы доказать это, в первом из рассмотренных нами случаев достаточно убедиться, что уравнение

$$m^2 + mn - n^2 = \pm 1$$

имеет бесконечно много решений в целых числах m, n, а во втором случае – сделать то же самое для уравнения

$$k^2 - kn - n^2 = \pm 1 .$$

Впрочем, первое из этих двух уравнений сводится ко второму заменой m на $-k$.

Уравнение $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$

Это уравнение не имеет вида $x^2 - dy^2 = 1$. Но умножение на 4 приводит его к виду

$$4x^2 - 4xy - 4y^2 = \pm 4 ,$$

т.е.

$$(2x-y)^2 - 5y^2 = \pm 4 ,$$

что уже похоже на уравнение Пелля. Впрочем, мы воспользуемся этим преобразованием чуть позже, а здесь решим уравнение в его первоначальном виде.

Немного посчитав, можно составить таблицу:

x	0	1	1	2	3	5	8	13	21
y	1	0	1	1	2	3	5	8	13
$x^2 - xy - y^2$	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1

Всякий, кто знаком с числами Фибоначчи, уже узнал их. А остальным скажем, что последовательность Фибоначчи задана своими двумя членами $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$ и рекуррентной формулой $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$. Несколько следующих членов этой замечательной последовательности таковы: $\varphi_2 = 0 + 1 = 1$, $\varphi_3 = 1 + 1 = 2$, $\varphi_4 = 1 + 2 = 3$, $\varphi_5 = 2 + 3 = 5$, $\varphi_6 = 3 + 5 = 8$, $\varphi_7 = 5 + 8 = 13$.

Теорема 6. *Если* $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$, *то пара чисел* $(X; Y) = (x + y; x)$ *удовлетворяет равенству* $X^2 - XY - Y^2 = \mp 1$.

Доказательство.

$$(x+y)^2 - (x+y)x - x^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - xy - x^2 =$$

$$= -\left(x^2 - xy - y^2\right) = \mp 1 .$$

Доказав теорему 6, мы наконец-то решили задачу М1775.

Как и не раз выше, сформулируем и не докажем еще одну теорему.

Теорема 7. *Уравнение* $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ *не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения* $(0; 1)$ *при помощи правила* $(x; y) \to (x + y; x)$.

Следствие. *Все решения уравнения* $z^2 - 5y^2 = \pm 4$ *в натуральных числах даются формулой* $(z; y) = (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}; \varphi_n)$.

Доказательство. Каждой паре целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющей равенству $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$, соответствует пара целых чисел $(z; y) = (2x - y; y)$, удовлетворяющая равенству $z^2 - 5y^2 = \pm 4$, и наоборот (поскольку числа z и y одной четности). Осталось заметить, что если $x = \varphi_{n+1}$ и $y = \varphi_n$, то

$$z = 2x - y = 2\varphi_{n+1} - \varphi_n = \varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} .$$

Упражнение 20. Докажите тождества

а) $\varphi_n^2 = \varphi_{n-1}\varphi_{n+1} - (-1)^n$;

б) $\varphi_n^2 = \varphi_{n-2}\varphi_{n+2} + (-1)^n$.

(Продолжение следует)