большого прямоугольника и центр маленького прямоугольника, представляющего собой «вырез», – она и окажется как раз тем, что требуется.

4. Вместо гирек будем рассматривать числа, выражающие их массы. От каждого из двух диаметрально расположенных чисел отнимем величину наименьшего из них. Тогда по кругу будут расставлены только нули и единицы.

Проведем диаметр круга так, чтобы по разные стороны от него оказалось одинаковое количество чисел. Зафиксируем какую-то одну из сторон и подсчитаем сумму всех расположенных на ней чисел. Начнем поворачивать диаметр относительно центра круга на 18°, каждый раз подсчитывая сумму чисел на фиксированной стороне. Эта сумма при каждом повороте будет увеличиваться или уменьшаться на 1, пробегая все промежуточные значения от наименьшей возможной величины n $(n \le 5)$ до наибольшей возможной величины N $(N \ge 5)$, причем $n + N = 10$. Следовательно, при каком-то положении диаметра сумма чисел на фиксированной стороне окажется равной 5, т.е. на двух разделенных этим диаметром половинках круга сумма чисел одинакова. А это означает, что общие массы гирек, стоящие на этих половинках, равны.

5. Можно. Обозначим через $n!$ произведение первых натуральных чисел от 1 до n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Отметив числа 10, 11, 12, …, $(9!-1)$, 9!, получим

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (9!-1) = 10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (9!-1) \cdot 9!.$$

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №6 за 2001 г.)

11. $\frac{125}{9}$. Рассмотрим любой квадрат 15×15. Его можно разделить на 25 квадратов 3×3. В каждом из них сумма чисел равна 5, поэтому сумма чисел во всем квадрате 15×15 равна $5 \cdot 25 = 125$. С другой стороны, этот квадрат можно разделить на 9 квадратов 5×5. Сумма в каждом из них одинакова, поэтому она равна $\frac{125}{9}$.

12. 16. Чем меньше использовано прямоугольников, тем меньше частей получится после разрезания. Без прямоугольников не обойтись. Действительно, если угол закрыт фигуркой из четырех клеток, то несколько других фигурок вырезаются однозначно, и соседние углы не попадают в фигурку (рис.2).

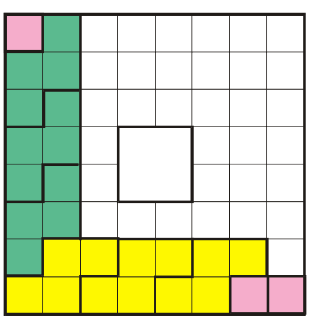

Рис. 2

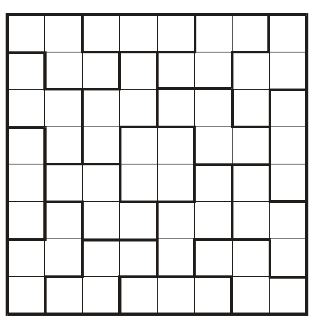

Рис. 3

Если вырезать один, два или три прямоугольника, то число оставшихся клеток не будет делиться на 4 и разрезание оставшейся части на фигурки из четырех клеток невозможно. Четырьмя прямоугольниками обойтись можно (рис.3). При этом получается 16 фигурок.

13. Выигрышную стратегию имеет Малыш. Сначала заметим, что если Малышу удастся оставить Карлсону брусок вида $1 \times n \times n$, где $n > 1$, то Малыш обеспечивает себе победу. Действительно, в этом случае Карлсон своим ходом вынужден будет оставить либо брусок $1 \times 1 \times n$, после чего он проигрывает, либо брусок $1 \times m \times n$, $1 < m < n$. В последнем случае Малыш своим очередным ходом оставляет брусок $1 \times m \times m$, размеры которого меньше размеров предыдущего бруска. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не получится кубик $1 \times 1 \times 1$, который Малыш съедает. Выигрышная стратегия Малыша состоит в следующем. Своим первым ходом Малыш оставляет брусок $2 \times 2001 \times 2002$. В ответ Карлсон не может оставить брусок $1 \times 2001 \times 2002$, $2 \times 2001 \times 2001$ или $2 \times 2001 \times 2$, иначе своим очередным ходом Малыш оставит брусок, один из размеров которого равен 1, а два других одинаковы, после чего выигрывает.

Предположим, Карлсон оставит брусок, заменив один из размеров предыдущего бруска числом p, $2 < p < 2001$. Тогда $p = 2q$ или $p = 2q - 1$, где натуральное число q таково, что $2 \le q \le 1000$. В обоих случаях Малыш может сделать брусок $2 \times (2q-1) \times 2q$ – того же вида, что и брусок, который он оставил перед этим, но меньших размеров. Если Карлсон и дальше будет играть наилучшим образом, то Малыш в конце концов оставит ему брусок $2 \times 3 \times 4$. Несложно убедиться, что как бы Карлсон ни разрезал этот брусок, при правильной игре Малыша он обязательно проигрывает.

14. Продолжим стороны AH, BC и FG до пересечения в точках M, N, K (рис.4). Покажем, что точка O – центр вписанной окружности треугольника MNK – является центром описанной окружности шестиугольника.

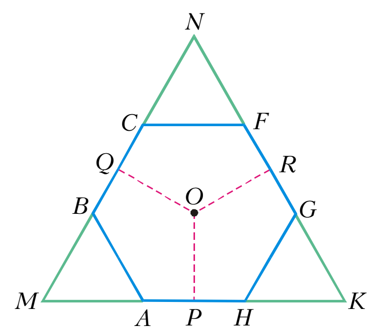

Рис. 4

Обозначим через P, Q, R основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны AH, BC и FG соответственно. Из равенств углов: $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle F$ и $\angle G = \angle H$ следуют равенства длин отрезков: $AP = BQ$, $QC = FR$, $RG = HP$. Так как $AP + HP = BQ + QC = FR + RG$, то $AP = BQ = QC = FR = RG = HP$ и шесть прямоугольных треугольников OAP, OHP, OBQ, OCQ, OFR, OGR равны, т.е. равны их гипотенузы. Поскольку точки A, B, C, F, G, H находятся на одинаковом удалении от точки O, то эта точка является центром окружности, описанной вокруг шестиугольника $ABCFGH$.

15. Если справедливо равенство $ab^2 + ba^2 = 0$ или равносильное ему равенство $ab(a+b) = 0$, то либо одно из чисел a или b равно нулю, либо $a + b = 0$. Несложно проверить, что в любом из этих случаев равенство $a^5 + b^5 = (a+b)^5$ выполняется. Пусть теперь справедливо равенство $a^5 + b^5 = = (a+b)^5$. Докажем, что в этом случае $ab^2 + ba^2 = 0$. Здесь можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Предположим, что ни одно из равенств $a = 0$, $b = 0$, $a + b = 0$ не выполняется. Числа a и b не могут быть одного знака, поскольку в этом случае было бы справедливо равенство $|a|^5 + |b|^5 = (|a| + |b|)^5$, что невозможно. Действительно, раскрывая скобки в правой части этого равенства, можно убедиться, что она больше левой.