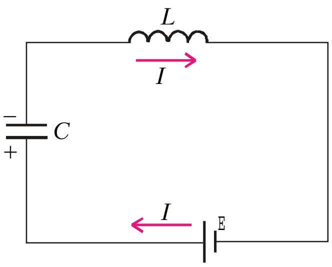

Рис. 5

Подставляя выражение для I' в уравнение закона Ома, получим

$$U_C'' + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 \mathcal{E},$$

где $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота контура. Это уравнение является неоднородным (справа не ноль) линейным дифференциальным уравнением второго порядка (по старшей производной). Ранее, в задаче 1, мы имели дело с аналогичным уравнением, только с нулевой правой частью. Сделав замену переменной: $X = U_C - \mathcal{E}$, сведем наше неоднородное уравнение к однородному:

$$X'' + \omega_0^2 X = 0.$$

Решение такого уравнения мы уже знаем:

$$X = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

Для определения констант A и B используем наши начальные условия: при $t=0$ $U_C = 0$, или $X = -\mathcal{E}$, и $I = CU_C' = 0$, или $X' = 0$. Подстановка начальных условий в решение позволяет найти A и B:

$$A = -\mathcal{E}, \quad B = 0.$$

Окончательно получим

$$X(t) = -\mathcal{E}\cos\omega_0 t,$$

или

$$U_C(t) = \mathcal{E}(1 - \cos\omega_0 t).$$

Изменение напряжения на конденсаторе будет происходить по гармоническому закону (рис.6), но, в отличие от предыдущей задачи, не относительно нулевого уровня, а относительно уровня $U_C = \mathcal{E}$.

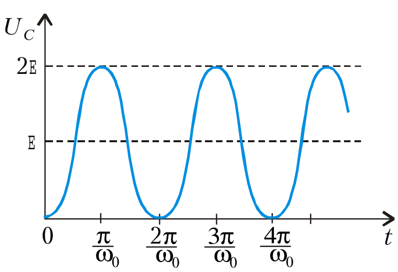

Рис. 6

Задача 3. *В колебательном LC-контуре, изображенном на рисунке 7, при разомкнутом ключе K заряд на конденсаторе емкостью C_1 равен q_0, а конденсатор емкостью C_2 не заряжен. Через какое время после замыкания ключа заряд на конденсаторе емкостью C_2 будет иметь максимальное значение? Чему будет равен этот заряд? Омическими потерями в катушке индуктивности пренебречь.*

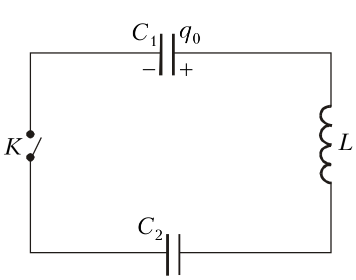

Рис. 7

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа. Пусть в этот момент заряд на первом конденсаторе q_1, на втором конденсаторе q_2 и в контуре течет ток I (рис.8). Поскольку нас интересует заряд $q_{2\max}$, разумно найти зависимость $q_2(t)$. Для этого запишем закон Ома для нашего контура:

$$-LI' = \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_2}.$$

Поскольку $I = q_2'$, а $q_1 + q_2 = q_0$, уравнение относительно q_2 будет иметь вид

$$q_2'' + \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2} q_2 = \frac{q_0}{LC_1}.$$

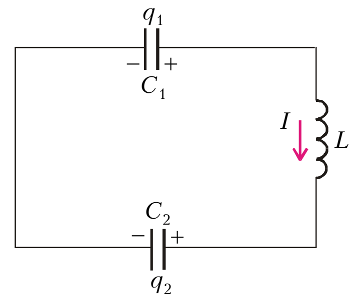

Рис. 8

Введем новую переменную:

$$X = q_2 - \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2},$$

запишем для нее уравнение колебаний:

$$X'' + \omega_0^2 X = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}$ – собственная частота контура, и его решение:

$$X(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

При $t=0$ $q_2 = 0$, или $X(0) = -\dfrac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}$, и $I=0$, или $X' = 0$. Начальные условия позволяют найти константы A и B:

$$A = -\frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}, \quad B = 0.$$

Решение уравнения колебаний имеет вид

$$X(t) = -\frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}\cos\omega_0 t,$$

или, переходя обратно к переменной q_2,

$$q_2(t) = \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2}(1 - \cos\omega_0 t).$$

Очевидно, что первый раз заряд q_2 достигнет максимального значения через время $t_1 = \pi/\omega_0$, затем это максимальное значение будет повторяться с периодом $T = 2\pi/\omega_0$. В общем случае это можно записать в виде

$$t_N = \frac{\pi}{\omega_0}(1 + 2N), \text{ где } N = 0,\ 1,\ 2\ldots$$

Величина максимального заряда на втором конденсаторе равна

$$q_{2\max} = \frac{2q_0 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Задача 4. *В схеме, изображенной на рисунке 9, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C не заряжен. Ключ K на некоторое время замыкают, а затем снова размыкают. Определите ток через катушку индуктивности в момент размыкания ключа, если после размыкания ключа максимальное напряжение на конденсаторе оказалось равным $2\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ – ЭДС батареи. Омическим сопротивлением катушки пренебречь. Внутреннее сопротивление батареи настолько мало, что время зарядки конденсатора (при замкнутом ключе) много меньше времени, в течение которого ключ K остается замкнутым.*

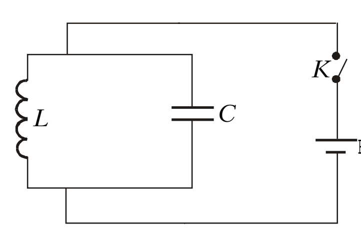

Рис. 9