Колебательный контур

В.МОЖАЕВ

В этой статье будут разобраны задачи, в которых основным элементом является колебательный LC-контур. В состав такого контура обычно входят два реактивных элемента – индуктивность и емкость, а также активное сопротивление. Последовательно соединенные, эти элементы и образуют последовательный колебательный контур. Основная задача при расчете колебательного контура состоит в определении временнóй зависимости тока в контуре и напряжений на его элементах при заданных начальных условиях.

Процессы в колебательном контуре описываются так называемым дифференциальным уравнением второго порядка, а общее решение этого уравнения содержит две неизвестные константы. Эти константы можно определить из начальных условий, вот почему для нахождения решения необходимо знать начальный ток в контуре и начальное напряжение, скажем, на конденсаторе.

Часто в задачах на колебательный контур требуется найти не общее решение, а какой-то конкретный параметр, например максимальный ток в контуре или максимальное напряжение на конденсаторе. Такие задачи можно решать, исходя из закона сохранения энергии и общих физических соображений. Так, при максимальном токе в контуре ЭДС индукции в катушке равна нулю, а если активное сопротивление контура равно нулю, то и напряжение на конденсаторе также равно нулю. Или, если напряжение на конденсаторе максимально, то ток в контуре отсутствует.

А теперь – конкретные задачи.

Задача 1. *В колебательном LC-контуре (рис.1) в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U_0. Найдите зависимости напряжения на конденсаторе и тока в контуре от времени после замыкания ключа.*

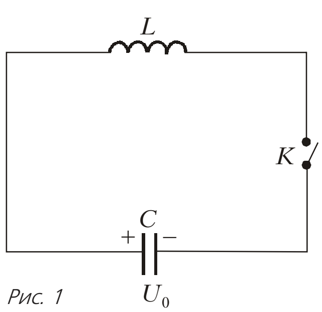

Рис. 1

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе $U(0) = U_0$, а ток в контуре $I(0) = 0$. Пусть в произвольный момент времени после замыкания ключа в контуре течет ток, как это изображено на рисунке 2. Запишем закон Ома для нашего контура:

$$LI' = U.$$

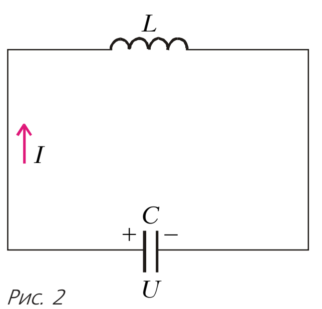

Рис. 2

Поскольку $I = -CU'$, получим

$$U'' + \frac{1}{LC}U = 0.$$

Это – однородное (справа стоит ноль) дифференциальное уравнение второго порядка (старшая производная второго порядка). Уравнения такого вида описывают гармонические колебания одного из параметров колебательной системы. В нашем случае –напряжения на конденсаторе. Решение уравнения имеет вид

$$U(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота колебаний контура, а A и B – константы, которые находятся из начальных условий. Первое начальное условие – это

$$U(0) = U_0.$$

После подстановки его в решение получим $A = U_0$. Из второго начального условия

$$I(0) = -CU' = 0$$

следует, что $B = 0$.

Теперь запишем окончательные выражения для напряжения на конденсаторе:

$$U(t) = U_0\cos\omega_0 t$$

и для тока в контуре:

$$I(t) = U_0\omega_0 C\sin\omega_0 t.$$

Сравнивая последние два выражения, видим, что напряжение на конденсаторе и ток в контуре изменяются по гармоническому закону с одной и той же частотой, но колебания тока и напряжения сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Зависимости $U(t)$ и $I(t)$ изображены на рисунке 3.

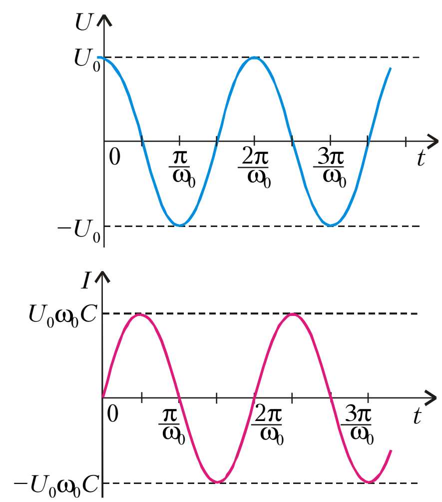

Рис. 3

Задача 2. *К LC-контуру (рис.4) в момент $t = 0$ подключают источник постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Определите напряжение на конденсаторе в зависимости от времени.*

Рассмотрим произвольный момент после замыкания ключа. Пусть в контуре течет ток I, как это изображено на рисунке 5. Запишем закон Ома для нашего контура:

$$\mathcal{E} - LI' = U_C,$$

где U_C – напряжение на конденсаторе. Используем связь между током и напряжением на конденсаторе:

$$I = CU_C'.$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$I' = CU_C''.$$

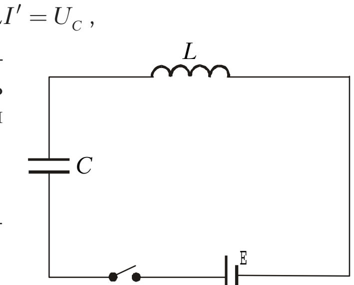

Рис. 4