Во многих сборниках конкурсных задач можно встретить следующую задачу.

Задача 4. *Имеются два слитка с массами m кг и n кг с различным процентным содержанием меди. От каждого слитка отделяется кусок, причем эти куски имеют равную массу, и сплавляется с оставшейся частью другого слитка. Какой массы куски следует отрезать от каждого слитка, чтобы процентное содержание меди в новых слитках было равным?*

Решение. Безусловно, эта задача легко решается стандартным образом при помощи уравнений. Правда, при этом надо не испугаться того, что число неизвестных (три) будет больше числа уравнений (одно). Как ни странно, более общим методом решения в данном случае будет арифметический. Более общим в том смысле, что он безболезненно проходит для любого числа слитков, в то время как алгебраический метод приводит к громоздким, трудно обозримым вычислениям.

На самом деле данная задача – обычная арифметическая задача «на части». В каждый из вновь образовавшихся слитков части исходных должны войти в отношении $m:n$. (Подумайте, почему.) Значит, в новом слитке массой в m кг содержится m равных частей из первого слитка (массой m кг) и n таких же частей из второго слитка. Масса одной части равна $\frac{m}{m+n}$ кг. Остаток от первого слитка в этом новом слитке равен $\frac{m}{m+n}m = \frac{m^2}{m+n}$ кг, а отрезанная часть второго равна $\frac{mn}{m+n}$ кг. Такую же часть надо отрезать от первого слитка.

Рассмотрим теперь несколько задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в вузы.

Задача 5. *Пятеро благородных рыбаков занимались ловлей рыбы. По окончании лова первому показалось, что он поймал больше остальных, и он разделил между ними поровну 1/3 своей добычи. После этого стало ясно, что у второго оказалось больше рыбы, чем у остальных, и он разделил между всеми остальными поровну 1/3 всей оказавшейся у него рыбы. Известно, что общий улов составлял 6 кг 400 г и что в результате описанных процедур он разделился поровну. Определите первоначальный улов каждого из рыбаков.*

Решение. Данная задача – типичный пример арифметической задачи, решаемой с конца. В конце у каждого рыбака оказалось по 1 кг 280 г рыбы. Значит, у второго рыбака, перед тем как он делился с остальными, было в 3/2 раза больше рыбы, а именно 1 кг 920 г. Следовательно, у каждого из четырех оставшихся рыбаков в это время было по 1 кг 280 г – 640 г : 4 = 1 кг 120 г. Рассуждая таким же образом, найдем, что улов первого рыбака равнялся 1 кг 680 г, второго – 1 кг 780 г, а у каждого из трех оставшихся – по 980 г.

Задача 6. *В порту для загрузки танкеров имеются три трубопровода. По первому из них закачивается в час 300 тонн нефти, по второму – 400 тонн, по третьему – 500 тонн. Нужно загрузить два танкера. Если загрузку производить первыми двумя трубопроводами, подключив к одному из танкеров первый трубопровод, а к другому танкеру второй трубопровод, то загрузка обоих танкеров при наиболее быстром из двух возможных способов подключения займет 12 часов. При этом какой-то из танкеров, может быть, окажется заполненным раньше, и тогда подключенный к нему трубопровод отключается и в дальнейшей загрузке не используется. Если бы вместимость меньшего по объему танкера была вдвое больше, чем на самом деле, и загрузка производилась бы вторым и третьим трубопроводами, то при быстрейшем способе подключения загрузка заняла бы 14 часов. Определите, сколько тонн нефти вмещает каждый из танкеров.*

Решение. Очевидно, что более производительный трубопровод следует подключить к танкеру с большей вместимостью. Поскольку один из двух танкеров был заполнен ровно за 12 часов, то либо меньший вмещает $12 \cdot 300 = 3600$ тонн нефти, либо больший $12 \cdot 400 = 4800$ тонн. Первый случай невозможен, так как при удвоении вместимости меньшего танкера получаем 7200 тонн, а для заполнения такого танкера даже третьим трубопроводом требуется более 14 часов. Следовательно, больший танкер вмещает 4800 тонн и заполняется вторым и, тем более, третьим трубопроводом быстрее чем за 14 часов. Значит, меньший танкер вмещает $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 500 = 3500$ тонн.

Самое главное в этой задаче – не испугаться громоздкого условия, подойти к ней с позиции обычного здравого смысла.

Минимальный здравый смысл и понимание, что такое «процент», – вот все необходимое для решения следующей задачи.

Задача 7. *В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа членов группы, принявших участие в кроссе, заключен в пределах от 96,8% до 97,2%. Определите минимально возможное число членов такой группы.*

Решение. Процент не участвовавших в кроссе заключен в пределах от 2,8% до 3,2%. Если бы в кроссе не участвовал 1 человек (меньше уже нельзя), то число членов группы заключалось бы в пределах от $1 \cdot \frac{100}{2{,}8} = 35{,}7\ldots$ до $1 \cdot \frac{100}{3{,}2} =$ $= 31{,}2\ldots$, т.е. минимальное число членов группы будет 32 человека. Понятно, что при меньшем числе членов группы 3,2% от этого числа будет меньше 1, а по условию в кроссе не участвовал по крайней мере один человек.

Следующая задача не совсем соответствует теме статьи, поскольку при ее решении больше используются геометрические, чем арифметические методы. Мы включили ее по двум причинам. Во-первых, при ее решении не используются ни уравнения, ни другие соотношения, содержащие неизвестные. Во-вторых, здесь иллюстрируется один весьма полезный метод решения задач на движение – графическая интерпретация.

Задача 8. *Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения различны), а затем, достигнув некоторой скорости, – равномерно. Отношения скоростей равномерного движения поездов равно 5/4. В некоторый момент времени скорости поездов оказались равными, а один из них прошел к этому времени расстояние в 5/4 раза больше, чем другой. В пункты B и A поезда прибыли одновременно. Какую часть пути прошел каждый из поездов к тому моменту, когда их скорости оказались равными?*

Решение. Рассмотрим графики, изображающие зависимость скорости от времени для каждого поезда. При этом можно считать, что оба поезда вышли из одного пункта. Для одного поезда графиком является ломаная OKM, для другого – OK_1M_1 (см. рисунок). Длина пройденного пути к определенному моменту времени одним из поездов равна площади фигуры, ограниченной снизу отрезком оси t и соответствующей частью графика его скорости сверху. По условию площади трапеций $OKMN$ и OK_1M_1N равны, значит, равновелики и фигуры OKP и PK_1M_1M. Площадь $OKPL$ равна 5/4 площади OPL (по условию). Если площадь OPL равна 1, то площадь OKP есть 1/4; площадь