Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2002 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 – 2002» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1816» или «Ф1823». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

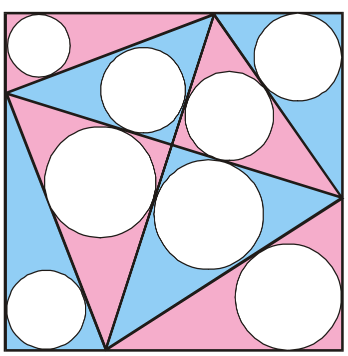
В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1816–М1825, Ф1823–Ф1832

М1816. Сумма 2000 натуральных чисел больше их произведения. Докажите, что не более 10 из этих чисел отличны от 1.

А.Спивак, В.Сендеров

М1817. Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями вписан в квадрат. Диагонали и стороны четырехугольника разделили квадрат на 8 треугольников, попеременно окрашенных в красный и синий цвет (см. рисунок). Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в красные треугольники, равна сумма радиусов окружностей, вписанных в синие треугольники.



В.Произволов

М1818. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2,$$

где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

С.Нестеров

М1819. В треугольнике ABC точки O, I – центры описанной и вписанной окружностей, A', B', C' – точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB, точка P – ортоцентр треугольника $A'B'C'$. Докажите, что точки O, I и P лежат на одной прямой.

А.Заславский

М1820. а) Для натуральных чисел x и y десятичная запись числа x^2+xy+y^2 оканчивается нулем. Докажите, что она оканчивается двумя нулями.

б*) Для натуральных чисел x и y число $x^4+x^2y^2+y^4$ делится на 11. Докажите, что это число делится на 14641.

В.Произволов

М1821*. Докажите, что для каждого натурального n выполняется неравенство

$$\left|\left\{\frac{n}{1}\right\}-\left\{\frac{n}{2}\right\}+\left\{\frac{n}{3}\right\}-\ldots+(-1)^n\left\{\frac{n}{n}\right\}\right|<\sqrt{2n}$$

($\{a\}$ – дробная часть числа a).

В.Барзов

М1822. На турнир математических боев съехались $2N$ команд, каждая из которых должна по одному разу встретиться со всеми остальными. Организаторы планируют провести соревнования за $2N-1$ туров (чтобы в каждом туре участвовали все команды, и выходных дней у команд не было). Однако вследствие своей безалаберности они составляют расписание встреч на каждый тур без каких-либо планов на будущее – лишь бы в данном туре участвовали все команды и не произошло повторных встреч.
Может ли случиться так, что составить расписание для очередного тура окажется невозможным (т.е. при любом разбиении команд на пары окажется, что какие-то две команды уже встречались ранее), если

а) $N=5$;
б) $N=6$;
в) $N=8$;
г) N – любое натуральное число?

И.Акулич