имеем

$$|xy| = \left|(ma+nc)\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{c}\right)\right| =$$

$$= \left|m^2 + mn\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right) - n^2\right| = \left|m^2 + mn - n^2\right| .$$

Внутренность «креста» из гипербол $xy = \pm 1$ задается неравенством $|xy| < 1$. Но при целых m и n величина $\left|m^2 + mn - n^2\right|$ тоже целая. Единственным целым числом, которое по модулю меньше 1, является ноль. Значит, для лежащей внутри креста точки решетки имеем

$$\left|(ma+nc)\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{c}\right)\right| = 0,$$

откуда $ma + nc = 0$ или $mc - na = 0$. Ввиду иррациональности отношения a/c это возможно лишь при $m = n = 0$.

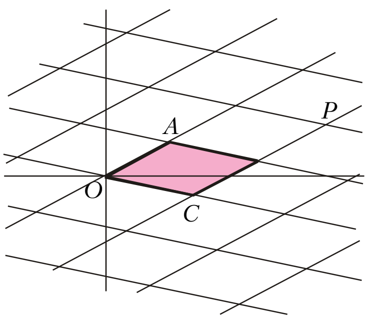

Рис.4

Значит, внутри «креста» из гипербол расположена единственная точка рассматриваемой решетки – начало координат.

Для решетки, порожденной параллелограммом рисунка 3, решение аналогично, поэтому мы выпишем только формулы

$$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OC} = \left(ma+nc; \frac{m}{a}+\frac{n}{c}\right)$$

и

$$|xy| = \left|(ma+nc)\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{c}\right)\right| = \left|m^2 + mn\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) + n^2\right| =$$

$$= \left|m^2 - 3mn + n^2\right| = \left|(m-n)^2 - (m-n)n - n^2\right| =$$

$$= \left|k^2 - kn - n^2\right| ,$$

где обозначено $k = m - n$.

Итак, внутри «креста гипербол» нет ни одной точки решеток, кроме начала координат. А на самих гиперболах таких точек бесконечно много. Чтобы доказать это, в первом из рассмотренных нами случаев достаточно убедиться, что уравнение

$$m^2 + mn - n^2 = \pm 1$$

имеет бесконечно много решений в целых числах m, n, а во втором случае – сделать то же самое для уравнения

$$k^2 - kn - n^2 = \pm 1 .$$

Впрочем, первое из этих двух уравнений сводится ко второму заменой m на $-k$.

Уравнение $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$

Это уравнение не имеет вида $x^2 - dy^2 = 1$. Но умножение на 4 приводит его к виду

$$4x^2 - 4xy - 4y^2 = \pm 4 ,$$

т.е.

$$(2x - y)^2 - 5y^2 = \pm 4 ,$$

что уже похоже на уравнение Пелля. Впрочем, мы воспользуемся этим преобразованием чуть позже, а здесь решим уравнение в его первоначальном виде.

Немного посчитав, можно составить таблицу:

x	0	1	1	2	3	5	8	13	21
y	1	0	1	1	2	3	5	8	13
$x^2 - xy - y^2$	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1

Всякий, кто знаком с числами Фибоначчи, уже узнал их. А остальным скажем, что последовательность Фибоначчи задана своими двумя членами $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$ и рекуррентной формулой $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$. Несколько следующих членов этой замечательной последовательности таковы: $\varphi_2 = 0 + 1 = 1$, $\varphi_3 = 1 + 1 = 2$, $\varphi_4 = 1 + 2 = 3$, $\varphi_5 = 2 + 3 = 5$, $\varphi_6 = 3 + 5 = 8$, $\varphi_7 = 5 + 8 = 13$.

Теорема 6. *Если $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$, то пара чисел $(X; Y) = (x + y; x)$ удовлетворяет равенству $X^2 - XY - Y^2 = \mp 1$.*

Доказательство.

$$(x+y)^2 - (x+y)x - x^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - xy - x^2 =$$

$$= -\left(x^2 - xy - y^2\right) = \mp 1 .$$

Доказав теорему 6, мы наконец-то решили задачу М1775.

Как и не раз выше, сформулируем и не докажем еще одну теорему.

Теорема 7. *Уравнение $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$ не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме тех, что получаются из «тривиального» решения $(0; 1)$ при помощи правила $(x; y) \to (x + y; x)$.*

Следствие. *Все решения уравнения $z^2 - 5y^2 = \pm 4$ в натуральных числах даются формулой $(z; y) = (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1}; \varphi_n)$.*

Доказательство. Каждой паре целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющей равенству $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$, соответствует пара целых чисел $(z; y) = (2x - y; y)$, удовлетворяющая равенству $z^2 - 5y^2 = \pm 4$, и наоборот (поскольку числа z и y одной четности). Осталось заметить, что если $x = \varphi_{n+1}$ и $y = \varphi_n$, то

$$z = 2x - y = 2\varphi_{n+1} - \varphi_n = \varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} .$$

Упражнение 20. Докажите тождества

а) $\varphi_n^2 = \varphi_{n-1}\varphi_{n+1} - (-1)^n$;

б) $\varphi_n^2 = \varphi_{n-2}\varphi_{n+2} + (-1)^n$.

(Продолжение следует)