

Материалы вступительных экзаменов 2001 года

Институт естественных наук и экологии при
«Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

Вариант письменного экзамена

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - y^2} = \sqrt{b}; \\ \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - y^2} = \sqrt{2b + (x + y)^2}. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - 2 \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

3. К параболы $y = x^2 - 3x + 3$ проведены две касательные. Одна из них касается левой ветви параболы и одновременно кривой, заданной уравнением $5x^2 - 50x + 5y^2 + 53 = 0$. Тангенс угла между двумя касательными равен $4/7$. Определите площадь фигуры, заключенной между параболой и этими касательными.

4. Окружность проходит через основания всех высот тупоугольного треугольника. Найдите ее радиус, если наибольшая сторона треугольника равна 4, а расстояние между основаниями высот, лежащими на продолжениях сторон треугольника, равно 3.

5. На сфере с радиусом 2 расположены три попарно касающиеся окружности с радиусом 1. Найдите объем и площадь поверхности усеченного конуса, обе окружности оснований которого лежат на этой же сфере и касаются каждой из данных окружностей.

6. Не пользуясь калькулятором, вычислите $\frac{1}{1,0000000011}$ с 30 знаками после запятой.

ФИЗИКА

Вариант письменного экзамена

1. Какую минимальную скорость v_0 нужно сообщить телу небольшой массы в центре астероида массой M и радиусом R , чтобы оно через радиальную шахту ушло на бесконечность? Плотность астероида считать постоянной во всем его объеме.

2. Цилиндрический сосуд с тонкими стенками, изготовленными из одного материала и имеющими одинаковую толщину, покоится на гладком горизонтальном столе (рис.1). Объем сосуда V , площадь его поперечного сечения S , масса стенок m .

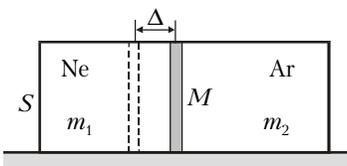


Рис. 1

Внутри находится тонкий подвижный поршень массой M , герметически разделяющий сосуд на две части. Левая часть заполнена неоном массой m_1 , правая – аргоном массой

m_2 . В начальный момент сосуд удерживают, а поршень отводят вправо от положения равновесия на расстояние Δ , малое по сравнению с продольными размерами частей сосуда. Затем сосуд и поршень отпускают. Найдите период и амплитуду колебаний сосуда, считая m_1 и m_2 малыми по сравнению с m и M . Трением и отклонением процесса колебаний от изотермического пренебречь. Абсолютная температура системы равна T .

3. Между двумя обкладками незаряженного плоского воздушного конденсатора емкостью C , закороченного на резистор сопротивлением R , помещают подобную обкладкам проводящую пластину с зарядом $q > 0$ на расстоянии x от одной из обкладок. После установления зарядового равновесия пластину быстро удаляют из конденсатора. Полагая, что за время перемещения пластины заряд конденсатора не успевает измениться, определите величину и направление тока через резистор сразу после удаления пластины и работу, совершенную при удалении пластины. Расстояние между обкладками конденсатора d мало по сравнению с их размерами.

4. Неподвижный точечный источник света S находится на главной оптической оси системы, состоящей из собирающей L_1 и рассеивающей L_2 линз, расположенных вплотную друг к другу (рис.2). Оптические оси линз совпадают, а их фокусные расстояния связаны соотношением $F_2 = -2F_1$, где F_1 – фокусное расстояние линзы L_1 . Расстояние от источника до линзы L_1 равно $d = 3F_1$. Обе линзы начинают двигаться в противоположных направлениях друг от друга с одинаковыми по модулю скоростями v . Найдите величину и направление скорости изображения, даваемого системой линз, в момент начала их движения.

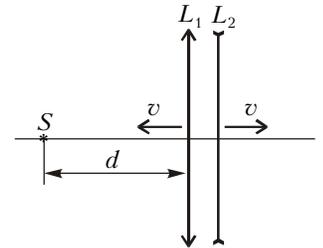


Рис. 2

5. В вертикальном однородном магнитном поле с индукцией B находятся горизонтальные проводящие рейки (рис.3).

По рейкам, расстояние между которыми l , может скользить без трения проводящий брусок массой m , прикрепленный к абсолютно упругой пружине жесткостью k . Рейки замкнуты на резистор сопротивлением R большой величины. Найдите количество теплоты, которое будет выделяться в резисторе за период колебаний бруска, после того как ему мгновенно сообщили скорость v . Сопротивление реек и бруска не учитывать.

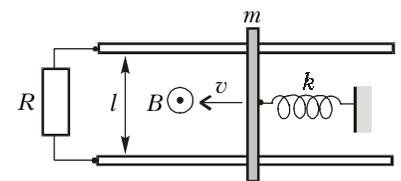


Рис. 3

Publication prepared by S. Fomichev