$A_2, A_3, \ldots, A_{100}$, мы увидим, что количество отрезков в пересечении будет не более 100 + 100 − 1 = 199, 199 + 100 − 1 = 298, …, 9802 + 100 − 1 = 9901, что и требовалось доказать.

Р.Карасев

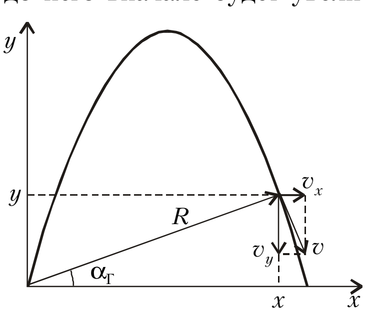
М1795. *На сфере S определена непрерывная функция $y = f(X)$, $X \in S$. Докажите, что найдется такое значение y_0, которое функция f принимает на каждой большой окружности сферы S.*
(Окружность на сфере является большой, если ее центр совпадает с центром сферы.)

От семейства больших окружностей $\{C_\alpha\}$ сферы S перейдем к семейству отрезков $\{J_\alpha\}$ на прямой, где J_α − область значений функции f на окружности C_α. Так как всякая пара больших окружностей C_α и C_β на сфере пересекается, то пересечение отрезков J_α и J_β тоже не пусто.
Далее применим одномерную теорему Хелли: всякое семейство попарно пересекающихся отрезков на прямой имеет непустое пересечение.
Любая точка $y_0 \in \bigcap\limits_\alpha J_\alpha$ будет тем значением, которое функция f принимает на каждой большой окружности сферы S.
Осталось обосновать одномерную теорему Хелли. Для случая конечного семейства отрезков достаточно взять точку, которая является самым правым из левых концов попарно пересекающихся отрезков. Эта точка принадлежит всем отрезкам семейства.
Для случая бесконечного семейства попарно пересекающихся отрезков достаточно взять точку, которая является верхней гранью (а таковая существует!) всех левых концов отрезков семейства; эта точка принадлежит всем отрезкам семейства.

В.Произволов

Ф1803. *Под каким углом к горизонту следует бросить камень, чтобы расстояние от него до точки бросания в течение полета все время возрастало? Камень бросают с небольшой скоростью, сопротивлением воздуха можно пренебречь.*

Если бросить камень почти вертикально, то расстояние до него вначале будет увеличиваться, а затем начнет уменьшаться. Ясно, что нужно найти «граничное» значение угла бросания $\alpha_г$. Ясно также, что «подозрительная» точка траектории находится на спадающем ее участке. В этой точке вектор скорости $\vec{v}$ перпендикулярен радиусу-вектору $\vec{R}$ (см. рисунок). Тогда



$$\frac{y}{x} = \frac{v_x}{-v_y}, \text{ или } \frac{v_0 t \sin\alpha_г - gt^2/2}{v_0 t \cos\alpha_г} = \frac{v_0 \cos\alpha_г}{gt - v_0 \sin\alpha_г}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение:

$$t^2 - \frac{3v_0 \sin\alpha_г}{g} t + \frac{2v_0^2}{g^2} = 0.$$

У этого уравнения есть корень при условии, что дискриминант $D \geq 0$. Тогда условие задачи будет выполнено, если это уравнение не имеет корней, т.е. если

$$\frac{9v_0^2 \sin^2\alpha_г}{g^2} - \frac{8v_0^2}{g^2} \leq 0.$$

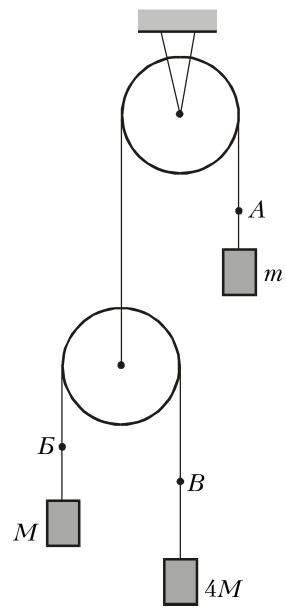
Для граничного угла находим

$$\sin\alpha_г = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Если $\alpha < \alpha_г = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} = 70{,}5^\circ$, то все хорошо.

З.Рафаилов

Ф1804. *Грузы, массы которых M и 4M, при помощи легкой нерастяжимой нити подвешены на очень легком подвижном блоке. Еще один кусок такой же нити переброшен через неподвижный блок, к одному концу этой нити прикреплен подвижный блок, к другому − груз массой m. При каких значениях m один из грузов может оставаться неподвижным после того, как тела перестанут удерживать?*



Рассмотрим все три возможности.
Чтобы груз массой m мог быть неподвижным, нужно выполнение условия (см. рисунок)

$$T_Б = T_В = 0{,}5T_A = 0{,}5mg.$$

Подвижный блок в этом случае неподвижен, следовательно

$$\frac{T_Б - Mg}{M} = \frac{4Mg - T_В}{4M}, \text{ или } \frac{0{,}5m - M}{M} = \frac{4M - 0{,}5m}{4M}.$$

Отсюда находим

$$m = \frac{16}{5}M.$$

Чтобы груз массой M мог быть неподвижен, нужно, чтобы выполнялись условия

$$T_Б = T_В = Mg,\ T_A = 2Mg.$$

При этом подвижный блок едет вниз с ускорением $(T_A - mg)/m$, а ускорение груза массой $4M$ должно быть вдвое больше:

$$\frac{4Mg - Mg}{4M} = 2\frac{2Mg - mg}{m},$$

откуда получаем

$$m = \frac{16}{11}M.$$

Ситуация, когда груз массой $4M$ был бы неподвижным, нереальна − ускорение груза массой M при этом оказалось бы равным $(4Mg - Mg)/M = 3g$, а груз массой m должен был бы падать с ускорением $1{,}5g > g$,