ных различны, то можно сделать несколько справедливых замечаний.

1°. Четыре касательные (две внешних и две внутренних) для всякой пары из шести окружностей принадлежат шестерке касательных.

При этом на каждой из двух окружностей четыре точки касания являются вершинами трапеции.

2°. Каждой окружности касаются пять из шести касательных. Значит, на всякой окружности из пяти точек касания каждые четыре являются вершинами трапеции.

3°. В силу леммы, пять точек касания на всякой окружности являются вершинами правильного пятиугольника.

Теперь из шести окружностей возьмем ту, у которой радиус наибольший (или одну из таких, если их несколько), пусть это будет окружность C. Общие касательные окружности C и еще какой-либо окружности дают на окружности C четыре точки касания, которые не могут быть вершинами правильного пятиугольника, поскольку все четыре принадлежат одной половинке окружности C.

Далее пустимся по волнам математической индукции. Из предположения, что утверждение задачи справедливо для какого-либо $n \geq 6$, выведем его справедливость для $n + 1$.

Имеем $n + 1$ окружностей, каждые пять из которых имеют общую касательную. В силу предположения индукции, каждые n из них имеют общую касательную. Таких касательных будет $n + 1$. Покажем, что все они не могут быть различными, а это будет означать, что для всех $n + 1$ окружностей нашлась общая касательная.

Возьмем пару из наших окружностей. Они принадлежат $n - 1$ группам по n окружностей в каждой. Значит, $n - 1 \geq 5$ касательных касаются этой пары. Но у пары окружностей только четыре различных общих касательных. Утверждение доказано.

В.Произволов

М1792. *В компании из $2n + 1$ человек для любых n человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.*

Докажем, что в этой компании есть $n + 1$ попарно знакомых. Очевидно, что есть двое знакомых, и если есть k попарно знакомых (где $k \leq n$), то по условию найдется отличный от них человек, знакомый со всеми этими k людьми. Отсюда следует, что найдутся $n + 2$ попарно знакомых $A_1, \ldots, A_{n+1}$.

Рассмотрим остальных n человек. По условию, существует отличный от них человек A_i, знающий их всех. Но тогда A_i знаком со всеми.

С.Берлов

М1793*. *В магическом квадрате $n \times n$, составленном из чисел 1, 2, …, n^2, центры любых двух клеток соединили вектором в направлении от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма всех полученных векторов равна нулю. (Магическим называется клетчатый квадрат, в клетках которого записаны числа так, что суммы чисел во всех его строках и столбцах равны.)*

Достаточно доказать, что сумма S горизонтальных проекций векторов, соединяющих центры клеток с бо́льшим числом с центрами клеток с меньшим числом, равна нулю. Аналогичными рассуждениями доказывается, что сумма вертикальных проекций векторов также равна нулю, откуда следует утверждение задачи.

Примем длину стороны клетки за 1, за положительное направление горизонтальной оси выберем направление слева направо. Будем перемещать числа внутри строк (при этом в одну клетку могут попадать несколько чисел) и следить за изменением суммы S проекций векторов. Заметим вначале, что сумма чисел в столбце магического квадрата составляет $1/n$ от суммы всех чисел, т.е. она равна $\frac{n(n^2+1)}{2}$. В клетку с числом k входит $n^2 - k$ и выходит $k - 1$ векторов. Следовательно, если мы передвинем k на клетку влево, то сумма S меняется на $(k-1)-(n^2-k) = 2k-1-n^2$. Последовательно передвинем n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, которые стояли в одном столбце, на одну клетку влево. При этом сумма S меняется на

$$\left(2a_1 - 1 - n^2\right) + \left(2a_2 - 1 - n^2\right) + \ldots + \left(2a_n - 1 - n^2\right) =$$

$$= 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - n - n^3 = n(n^2+1) - n - n^3 = 0.$$

Таким образом, последовательно переместив числа каждого столбца в самый левый столбец, получим, что сумма S не изменилась. Но в конце сумма S стала равна нулю, поскольку проекции всех векторов стали нулевыми. Значит, и в начале $S = 0$.

И.Богданов

М1794. *На прямой выбрано 100 множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$, каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что пересечение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков. (Точка также считается отрезком.)*

Докажем лемму.

Лемма. *Пусть множества A и B на прямой являются объединениями m и n отрезков соответственно. Тогда $A \cap B$ – объединение не более $m + n - 1$ отрезков.*

Доказательство. Ясно, что $A \cap B$ – тоже объединение отрезков. Пусть их количество равно k. Концы отрезков $A \cap B$ являются концами отрезков A или B. Следовательно, рассматривая концы отрезков $A \cap B$, получаем

$$2k \leq 2m + 2n. \qquad (*)$$

Но при этом самый левый конец отрезка из всех концов A или B либо не принадлежит $A \cap B$, либо входит и в концы A и в концы B. Значит, правую часть (*) можно уменьшить на 1. Аналогично, рассматривая самый правый конец A или B, мы уменьшаем правую часть (*) еще на 1. Тогда

$$2k \leq 2m + 2n - 2,$$

т.е.

$$k \leq m + n - 1.$$

Теперь решим задачу. Пересекая A_1 последовательно с