Упражнение 2. Покажите, что и более сложные частицы (см. рис.7,*б* и *в*) не приводят к изменению сопротивления вакуума.

Итак, полезный вывод: наличие частиц мы можем игнорировать!

Мир растений

– Все нетривиальные схемы – это схемы, у которых каркас выделенных проводников содержит точки входа и выхода. Давайте такие каркасы называть растениями. Этот мир очень богат и сложен и содержит все виды электрических цепей. Например, самый общий случай – полная цепь с различными проводимостями между узлами – есть по нашей терминологии разросшееся разноцветное дерево.

– Да, оказывается прикосновение к входу и выходу чревато не только на практике, но и в теории.

– Совершенно верно. Но наша цель – не анализ всех возможных случаев, а проверка принципа простоты. Частично мы в нем уже убедились – полные схемы не представляют труда для расчета. Давайте теперь рассмотрим почти полную цепь и убедимся, что расчет вполне остается нам по силам.

На рисунке 9 изображены три простейших растения: перемычка, элементарное растение и два элементарных растения. Найдем сопротивления этих цепей. Если

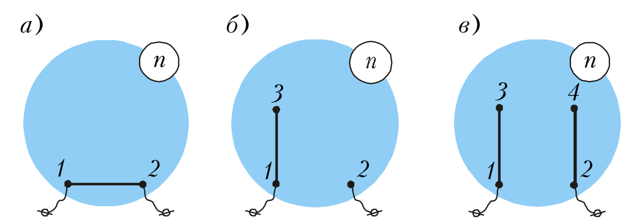

Рис.9. Три схемы растений: перемычка, элементарное растение, два элементарных растения

в предыдущем разделе мы удаляли особенные узлы, то теперь давайте попробуем другой прием – удаление вакуумных (регулярных) узлов. Вот что получается.

В случае перемычки можно удалить все узлы, кроме входа и выхода. На рисунке 10,*а* показано, что останется после такого удаления. Пунктирная линия соответ-

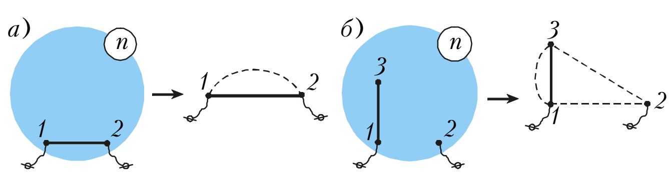

Рис.10. После удаления регулярных узлов получаются простейшие схемы

ствует вакуумной проводимости n-мерного вакуума после удаления $(n-2)$узлов, толстая жирная линия напоминает, что из этой проводимости следует вычесть σ_0, которую мы «забыли» включить в исходной схеме между узлами *1* и *2*. Поэтому для перемычки получим

$$\sigma_{\text{пер}} = \frac{n}{2}\sigma_0 - \sigma_0 = \frac{n-2}{2}\sigma_0 .$$

В случае элементарного растения после удаления вакуума останутся три узла (рис.10,*б*). Пунктирная линия обозначает проводимость n-мерного вакуума с исключенными $(n-3)$ узлами, жирная – отрицательную проводимость $-\sigma_0$. Так что исключение всех регулярных узлов приводит нас к схеме с тремя узлами и проводимостями между ними, равными

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{2,3} = \frac{n}{3}\sigma_0$$

и

$$\sigma_{1,3} = \frac{n}{3}\sigma_0 - \sigma_0 = \frac{n-3}{3}\sigma_0 .$$

Поэтому после удаления третьего узла для проводимости элементарного дерева получим

$$\sigma_{\text{эл}} = \frac{n}{3}\sigma_0 + \frac{\frac{n-3}{3}\sigma_0 \cdot \frac{n}{3}\sigma_0}{\frac{n-3}{3}\sigma_0 + \frac{n}{3}\sigma_0} = n\frac{n-2}{2n-3}\sigma_0 .$$

А в случае двух элементарных растений попробуйте произвести расчет сами и убедитесь в том, что проводимость этой схемы равна

$$\sigma_3 = \frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sigma_0 .$$

Окончательный ответ

– Пожалуй, теперь нам по силам решить изначальную задачу не только для трехмерного куба, но и для N-мерного.

– А мы N-мерный куб не видели!

– А его никто не видел. Обычно объектам присваивается статус N-мерного для особого шика, если просматривается какая-то аналогия с реальными трехмерными или двумерными объектами. Например, каркас обычного куба – это электрическая схема с 2^3 узлами. Поэтому электрическую схему с 2^N узлами мы можем с полным правом назвать N-мерным кубом.

Обобщаем дальше. Номера восьми вершин трехмерного куба в двоичной системе счисления можно записать так: 0 – (0,0,0), 1 – (0,0,1), … , 7 – (1,1,1). Тогда, если у нас есть цепь с 2^N узлами, мы можем каждому из них поставить в соответствие двоичный N-разрядный номер: 0 – (0,0,….,0), . . . , (2^N-1) – (1,1,…,1). По аналогии с трехмерным единичным кубом, эти наборы из N нулей и единиц можно назвать координатами вершин единичного N-мерного куба. Отрезок, соединяющий i-ю и k-ю вершины, будем называть ребром, если его «длина», вычисленная по теореме Пифагора через «N-мерные координаты»:

$$l = \sqrt{\left(x_i - x_k\right)^2 + \left(y_i - y_k\right)^2 + \ldots + \left(z_i - z_k\right)^2} ,$$

равна единице. А если эта величина для каких-то двух вершин будет иметь максимально возможное значение $\sqrt{N}$, то мы будем говорить, что эти вершины лежат на главной диагонали.