верхняя плоскость оказалась на глубине x, должна была уменьшиться по сравнению с действовавшей на лежавший на дне бочки диск на величину $F_2 = \pi r^2 \left(\rho_в g x + p_а\right)$, где $p_а$ – атмосферное давление. Ясно, что сила $\vec{F}_2$ направлена вертикально вверх и приложена к точке диска, лежащей на его верхней плоскости и совпадающей с осью трубки.

На рисунке 23 показано сечение бочки вертикальной плоскостью, проходящей через центр диска и ось трубки. Здесь же изображены силы, действующие на диск (за исключением сил реакции со стороны стенок трубки) для случая, когда диск уже не касается дна, но еще не отрывается от трубки. При отрыве на диск со стороны трубки может действовать только сила реакции, приложенная в точке A. Запишем условие отрыва диска от трубки в виде

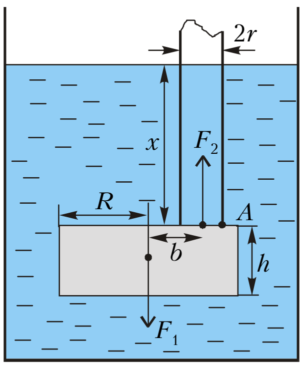

Рис. 23

$$rF_2 = (b + r)F_1 .$$

Подставляя в это выражение ранее найденные значения сил F_1 и F_2 и полагая $p_а = 1$ атм, а $g = 9{,}8$ м/с^2, определим искомую глубину отрыва:

$$x = \left(1 + \frac{b}{r}\right)\left(\frac{\rho}{\rho_в} - 1\right)\frac{R^2 h}{r^2} - \frac{p_а}{\rho_в g} \approx 55 \text{ см} .$$

3. В положении равновесия сумма сил натяжения нити, действующих на блок, уравновешивает силу тяжести $M\vec{g}$, действующую на блок с прикрепленным к нему грузом. Поскольку нить гладкая, при смещении груза из положения равновесия блок не должен вращаться вокруг своей оси, а силы натяжения нити в точках, лежащих на горизонтальном диаметре блока, должны быть одинаковы. Более того, так как нить невесома, модуль силы натяжения нити при переходе от одной ее точки к другой должен оставаться постоянным.

В силу нерастяжимости нити, отсутствия вращения блока вокруг своей оси и жесткой связи оси блока с грузом можно утверждать, что дополнительные деформации первой (Δx_1) и второй (Δx_2) пружин при смещении груза по вертикали из положения равновесия на величину Δx должны удовлетворять соотношению $\Delta x = \left(\Delta x_1 + \Delta x_2\right)/2$, причем $k_1 \Delta x_1 = k_2 \Delta x_2$. Поскольку в задаче спрашивается, при каких амплитудах вертикальные колебания груза могут быть гармоническими, силами сопротивления движению частей системы следует пренебречь. Тогда на основании закона сохранения механической энергии можно утверждать, что приращение потенциальной энергии системы при максимальном смещении груза из равновесного положения должно быть равно кинетической энергии системы в равновесном положении. Так как массой пружин и нити по условию задачи следует пренебречь, а груз и жестко связанный с ним блок движутся поступательно, максимальная кинетическая энергия равна

$$W_{к\,max} = \frac{M v_{max}^2}{2},$$

где v_{max} – максимальная скорость груза. При смещении груза вниз от равновесного положения на величину Δx_{max} приращение потенциальной энергии будет равно

$$\Delta W_{п\,max} = -Mg\Delta x_{max} + \frac{k_1\left(\left(\Delta x_{1р} + \Delta x_{1\,max}\right)^2 - \Delta x_{1р}^2\right)}{2} + \frac{k_2\left(\left(\Delta x_{2р} + \Delta x_{2\,max}\right)^2 - \Delta x_{2р}^2\right)}{2},$$

где $k_1 \Delta x_{1р} = k_2 \Delta x_{2р} = 0{,}5Mg$ и $\Delta x_{1\,max} + \Delta x_{2\,max} = 2\Delta x_{max}$. Учитывая, что при гармонических колебаниях $v_{max} = \omega \Delta x_{max}$, из закона сохранения энергии следует, что частота малых вертикальных колебаний груза равна

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k_1 k_2}{\left(k_1 + k_2\right)M}} .$$

Наконец, поскольку максимальное ускорение груза, направленное вниз, не может превышать ускорения свободного падения (нить не может толкать блок вниз!) и амплитуда ускорения в ω^2 раз больше амплитуды колебаний, т.е. $\omega^2 \Delta x_{max} \le g$, колебания груза могут оставаться гармоническими, если их амплитуда удовлетворяет неравенству

$$\Delta x_{max} \le \frac{k_1 + k_2}{4 k_1 k_2} Mg .$$

4. По условию задачи, шайба, двигаясь по поверхности ямки, периодически поднимается на одну и ту же высоту. Поэтому нужно считать, что при своем движении шайба не испытывает действия неконсервативных сил, а так как шайба является гладкой, сила реакции со стороны поверхности ямки может быть направлена только к центру ямки по ее радиусу. Учитывая также направление силы тяжести, действующей на шайбу, можно утверждать, что шайба должна двигаться в вертикальной плоскости, проходящей через ось вращения стола и остающейся неподвижной, т.е. движение шайбы должно быть подобно движению грузика математического маятника.

По условию, максимальная высота подъема шайбы $h_{max} = \left(1 - \cos\alpha_{max}\right)R$ много меньше радиуса ямки R. Следовательно, максимальная величина угла, образуемого вертикалью и прямой, соединяющей шайбу с центром ямки (рис.24), мала: $\alpha_{max} \ll 1$ рад, т.е. шайба совершает колебания с малой амплитудой. Тогда зависимость угла α от времени можно представить в виде $\alpha(t) = \alpha_{max}\cos\omega t$ (где ω – частота колебаний), если считать, что в момент времени $t = 0$ шайба находилась на максимальной высоте. Согласно этому закону движения, шайба должна находиться на высоте h над дном ямки в такие моменты времени τ, которые удовлетворяют уравнению $h(\tau) = \left(1 - \cos\alpha(\tau)\right)R$, или, учитывая малость угла, $h(\tau) = \left(R\alpha_{max}^2 \cos^2 \omega\tau\right)/2$. Поскольку $h(\tau) = h_{max}/k$, получаем

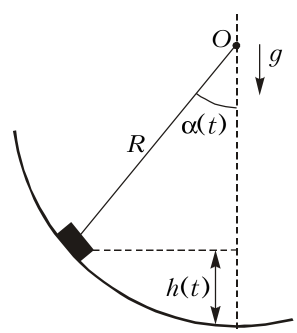

Рис. 24

$$\tau = \pm\frac{1}{\omega}\arccos\sqrt{\frac{1}{k}} + 2\pi N, \text{ где } N \in \mathbf{Z} .$$

Полагая, что при движении шайбы вверх угол α увеличивается, наиболее близкий к моменту времени $t = 0$ момент, когда движущаяся вверх шайба может оказаться на заданной высоте, равен $\tau_1 = -\frac{1}{\omega}\arccos\sqrt{\frac{1}{k}}$. Очевидно, что в следующий раз шайба окажется на той же высоте, двигаясь вниз, т.е. в момент времени $\tau_2 = \frac{1}{\omega}\arccos\sqrt{\frac{1}{k}}$. Так как за промежуток времени от τ_1 до τ_2 стол совершил n оборотов, период обращения стола должен быть равен $T = 2\tau_2/n$. Учитывая, что частота малых колебаний равна $\omega = \sqrt{g/R}$, находим искомый период обращения стола:

$$T = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{R}{g}}\arccos\sqrt{\frac{1}{k}} = \frac{\pi}{2n}\sqrt{\frac{R}{g}} .$$