6. -1; $2/7$. *Указание.* Выполните замену $t = \sqrt[3]{\dfrac{2}{x} - 6}$.

Вариант 17

1. $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[3; 2\sqrt{3}\right)$. **2.** $\dfrac{3\pi}{2}$, 2π, $2\pi - \arccos\dfrac{2}{5}$.

3. 4 км/ч, 8 км/ч, 12 км/ч.

4. $\left(0; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left[3; 3^{\sqrt{13}}\right]$. *Указание.* После замены $t = \log_3 x$ неравенство приводится к виду

$$(1+t)\sqrt{\frac{t-1}{3(1+t)}} \le 2.$$

5. $\angle BOC = 112{,}5^\circ$.

6. $\{-1\} \cup \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \dfrac{1}{2}\right] \cup \{1\}$. Преобразуем данную систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + y = a, \\ ax^3 + y^3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x), \\ a\left(x^3 - 1\right) + a^3(1-x)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x), \\ a(x-1)\left(x^2 + x + 1 - a^2(x-1)^2\right) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы приводит к рассмотрению трех случаев.

а) $a = 0$. Тогда система имеет бесконечно много решений вида $(t; 0)$, где $t \in \boldsymbol{R}$. Таким образом, значение $a = 0$ не является искомым. б) $x = 1$. Очевидно, система имеет решение $(1; 0)$ при любом a. в) Третий вариант сводится к системе

$$\begin{cases} y = a(1-x), \\ x^2 + x + 1 - a^2(x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x), \\ \left(a^2 - 1\right)x^2 - \left(2a^2 + 1\right)x + a^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $x = 1$ не удовлетворяет второму уравнению ни при каком значении параметра a. Поэтому искомыми являются те и только те значения a, при которых система в) имеет не более одного решения.

У этой системы уравнений при $a^2 = 1$ есть единственное решение $(0; a)$. Если же $a^2 \ne 1$ $(a \ne 0)$, то квадратное уравнение (а с ним и система) имеет не более одного решения при условии, что дискриминант

$$D = \left(2a^2 + 1\right)^2 - 4\left(a^2 - 1\right)^2 = 3\left(4a^2 - 1\right) \le 0,$$

что равносильно $0 < |a| \le \dfrac{1}{2}$.

7. $(\pi n; \pi n - 1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Преобразуем выражение под радикалом:

$$A = 3 + 2x - 2y + 2xy - x^2 - y^2 = -(x - y - 1)^2 + 4.$$

Отсюда с учетом неотрицательности подкоренного выражения имеем $0 \le A \le 4$.

Заметив, что $\cos x \ne 0$, перепишем данное уравнение, переходя к переменной $t = \operatorname{tg} x$:

$$t^2 - \left(\sqrt{A} - 2\right)t + 2 - \sqrt{A} = 0.$$

Это уравнение может иметь решения лишь при условии неотрицательности дискриминанта:

$$\left(\sqrt{A} - 2\right)^2 - 4\left(2 - \sqrt{A}\right) \ge 0, \text{ т.е. } A \ge 4.$$

Сравнивая с полученным ранее ограничением, имеем $A = 4$. Тогда

$$\begin{cases} t = 0, \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}, \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \\ y = \pi n - 1, \end{cases} \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

ФИЗИКА

Физический факультет

1. На рисунке 22 сплошной линией показано положение сечения цилиндра вертикальной плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, в тот момент времени t, когда доска, лежащая на нем, образует со столом угол α. Пунктирной линией изображено положение указанного сечения по прошествии небольшого промежутка времени Δt. Считая (как обычно это и делается при решении подобных задач) цилиндр, стол и доску твердыми телами, можно утверждать, что прямая, проходящая через вершину угла и центр сечения цилиндра, является биссектрисой угла α.

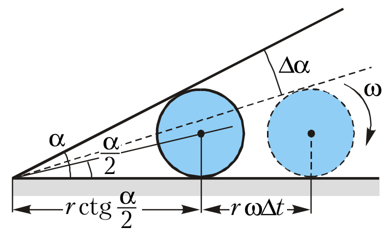

Рис. 22

Поскольку цилиндр катится по столу без проскальзывания с угловой скоростью ω и его ось остается параллельной оси вращения доски, ось цилиндра за промежуток времени Δt переместится на расстояние $\Delta s = r\omega\Delta t$, где r – радиус цилиндра, а доска повернется на угол $\Delta\alpha$. Учитывая, что выбранный промежуток времени Δt достаточно мал, можно считать, что угол $\Delta\alpha$ мал и вращение доски в течение этого промежутка времени неотличимо от равномерного. Поэтому, если искомую скорость вращения доски обозначить Ω, то $\Delta\alpha = \Omega\Delta t$. С другой стороны, из геометрии получим

$$r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha - \Delta\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) = r\omega\Delta t.$$

Поскольку $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, а синус малого угла равен самому углу (измеренному в радианной мере), искомая угловая скорость равна

$$\Omega = 2\omega\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

2. Будем решать задачу, полагая, что бочка покоится относительно инерциальной системы отсчета, а подъем диска осуществляется столь медленно, что можно пренебречь силами сопротивления движению диска со стороны воды. Когда диск находился на дне бочки, на него действовали сила тяжести, сила реакции дна и сила Архимеда (из-за шероховатости дна). Считая воду несжимаемой и полагая плотность воды равной $\rho_в = 1$ г/см^3, получим, что равнодействующая сил тяжести и гидростатического давления в этом случае должна быть равна $F_1 = \pi R^2 h\left(\rho - \rho_в\right)g$, где g – ускорение свободного падения. В силу симметрии диска можно утверждать, что эта сила приложена к центру тяжести диска.

После того как к диску прижали трубку, поршень подняли вверх и диск оторвался от дна бочки, сила реакции дна стала равной нулю, а на участок верхней плоскости диска, ограниченный контуром трубки, стали действовать силы со стороны трубки. Действие же сил гидростатического давления воды на этот участок прекратилось. По условию задачи, вплоть до момента отрыва в трубке под поршнем не должно находиться никакого вещества, поэтому результирующая сил гидростатического давления воды, действующих на диск, когда его