

$7\pi, 8\pi, 9\pi, 10\pi$ вида x_1 и корень $x_2 = \frac{39}{4}\pi$, т.е. ровно шесть корней.
Пусть $a > 3$. Учитывая неравенство $a < 1 + \sqrt{6,5}$, получаем, что левая граница заданного отрезка удовлетворяет условию

$$6\pi < 2a\pi < 2(1 + \sqrt{6,5})\pi < 8\pi.$$

Тогда для наличия ровно шести корней необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} 6 < 2a \leq 7, \\ 11 \leq a^2 + 1 < 2; \\ 7 < 2a < 2(1 + \sqrt{6,5}), \\ 12 \leq a^2 + 1 < 13, \end{cases}$$

т.е. $\sqrt{10} \leq a < \sqrt{11}$.

Вариант 11

1. $[-\sqrt{10}; -3] \cup [3; \sqrt{10}]$. *Указание.* Докажите, что $0 < \sqrt{31} - \sqrt{21} < 1$.

2. $\pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

3. -9 . *Указание.* Положим $b = a + d, c = a + 2d$. Выразив минимизируемое выражение через a и d , получим

$$2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a = a^2 + 6a = (a + 3)^2 - 9.$$

Последнее выражение достигает минимума, равного -9 , при $a = -3$. Осталось показать, что для этого a можно подобрать такое d , что числа $a - c = -2d, c - b = d, 2a = -6$ образует геометрическую прогрессию.

4. $2\sqrt{3}$. *Указание.* Смежные стороны ромба, а значит, и опирающиеся на них треугольники симметричны относительно одной из диагоналей ромба (рис.18). Поэтому четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником со сторонами, параллельными диагоналям ромба.

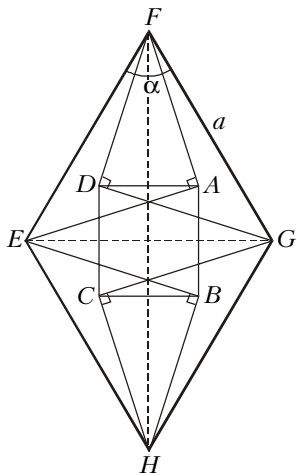


Рис. 18

5. 3. *Указание.* Поскольку $-1 \leq 2^x - 7 \leq 1$, то $x \leq 3$, но тогда $\frac{6\pi}{x} \geq 2\pi$. Однако левая часть уравнения не больше чем 2π , что возможно только при $x = 3$.

6. $\mathbf{Z} \setminus \{-11; -10; \dots; -4; -3\}$. *Указание.* Первое неравенство задает на координатной плоскости Oxy круг с центром $(1; -2)$ и радиусом $|k + 5|$, второе – круг с центром $\left(\frac{k}{5}; -\frac{2k}{5}\right)$ и радиусом 1 (оба круга с границей).

Система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих кругов не превосходит суммы радиусов, т.е. когда

$$\sqrt{\left(1 - \frac{k}{5}\right)^2 + \left(-2 + \frac{2k}{5}\right)^2} \leq |k + 5| + 1.$$

Осталось решить полученное неравенство.

Вариант 12

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.

2. $(1; +\infty)$. 3. $19/44$. 4. 50%.

5. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. *Указание.* Первые два неравенства задают угол на плоскости Oxy . Прямые $y + ax = -1$ проходят через точку $(0; -1)$. Число a удовлетворяет условию, если прямая $y = -ax - 1$ пересекает обе стороны угла.

Вариант 13

1. $\left[0; \frac{15}{4}\right] \cup [4; +\infty)$.

2. 2 млн. 400 тыс. рублей и 3 млн. 600 тыс. рублей.

3. 36.

4. $(\log_2 49 - 4; \log_2 7)$. *Указание.* Введите переменную $t = \log_2(2^x - 3)$.

5. $\frac{\sqrt{356} - 12}{6}, \frac{\sqrt{164} - 12}{6}$. *Указание.* Уравнение приводится к виду

$$\cos\left(\pi\sqrt{6 - 4x - x^2} - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Отсюда

$$\pi\sqrt{6 - 4x - x^2} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z},$$

т.е.

$$\sqrt{6 - 4x - x^2} = \frac{1}{3} + 2k, \text{ где } k = 0 \text{ или } k = 1.$$

6. $\arccos(6 - \sqrt{33})$. Заметим, что центр O шара, вписанного в правильную пирамиду $SAB CDE F$ с вершиной S , лежит на высоте SH пирамиды, а точка K касания вписанным шаром боковой грани SBC принадлежит апофеме этой грани. Пусть P и Q – середины противоположных ребер BC и EF основания, T – середина бокового ребра SA , R – радиус вписанного шара, r – радиусы шаров с центрами в серединах ребер, $SH = h$.

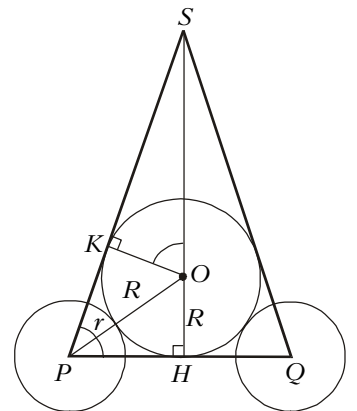


Рис. 19

Рассмотрим сечение SPQ (рис.19). Поскольку $SP \perp BC, QP \perp BC$, то $\angle SPH$ – плоский угол двугранного угла. Обозначим его величину через α .

Пусть a – длина стороны основания пирамиды, тогда

$$PH = \frac{\sqrt{3}}{2}a. \text{ Так как } OK \perp SP, SH \perp PQ, \text{ то } \angle KOS = \angle SPH.$$

Отсюда $\Delta SKO \sim \Delta SPH$, следовательно,

$$\frac{OK}{SO} = \frac{PH}{SP}, \text{ т.е. } \frac{R}{h - R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}}.$$

Возведение в квадрат в последнем равенстве приводит к соотношению

$$3a^2(h - 2R) = 4R^2h. \tag{1}$$