

Рис. 5

$$\beta = \angle AMH, \sin \beta = \frac{56}{65}, \cos \beta = \frac{33}{65},$$

$$\cos \angle DML_1 = \cos(\beta - \alpha) = \frac{12}{13}, \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{5}{12},$$

$$\sin \angle DMK_2 = \sin(\beta + \alpha) = \frac{323}{325}.$$

В первом случае сечение выглядит, как на рисунке 4, и имеет площадь

$$S_1 = (MN + KE) \cdot KM = MN \left(1 + \frac{A'K_1}{A'D'} \right) ML =$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{14} \right)^2} \left(1 + \frac{\frac{3}{14} - \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{14}}{\frac{3}{14}} \right) \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{12}{13} =$$

$$= \frac{169}{14^2 \cdot 27} \sqrt{187} = \frac{169}{5292} \sqrt{187}.$$

Во втором случае сечение треугольное и имеет площадь

$$S_2 = K_2M \cdot MN = \frac{3}{325} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{14} \right)^2} = \frac{975}{14^2 \cdot 323} \sqrt{187} < S_1.$$

6. $-\frac{3}{4}; \frac{4}{3}$. *Указание.* Множество решений каждого из неравенств системы

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

может представлять собой отрезок, объединение двух непересекающихся лучей (с началом), прямую, точку или пустое множество. Поэтому система может иметь единственное решение только в следующих случаях:

А. Решением одного из неравенств является ровно одна точка.

Б. Множества решений обоих неравенств имеют общую граничную точку, т.е. существует решение системы

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0. \end{cases}$$

Вариант 2

1. $(-\infty; -2] \cup [0; \lg 101 - 2)$. *Указание.* Неравенство преобразуется к виду $(\log_2 5 - 1) \log_5 y \leq 0$, где $y = 101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}$.

2. Нет. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$12 \sin x = |5 \cos x - 4|.$$

Решениям этого уравнения соответствуют точки $A(u; v)$ и $B(u; v)$ пересечения единичной окружности $u^2 + v^2 = 1$ с графиком функции $12v = |5u - 4|$ (рис.6).

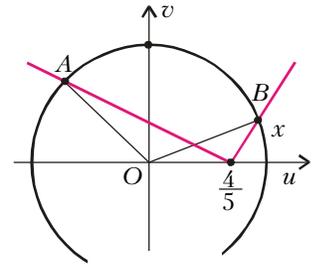


Рис. 6

3. $\frac{34}{9}$. *Указание.* Пусть O – центр параллелограмма, $BD = 2x$, $AC = 2y$. Тогда, так как $2(AB^2 + BC^2) = BD^2 + AC^2$, $BO \cdot BE = AO \cdot OC$, получаем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x(9-x) = y^2. \end{cases}$$

4. 618, 659, 698.

5. $(-\infty; -\frac{8}{7}) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{8}{9}; +\infty)$. *Указание.* Область значений функции $f(a) = a^4 \sqrt{4 - a^4}$ – отрезок $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$. Поэтому корнями данного уравнения не могут быть те и только те значения x , для которых либо $2x^4 + x^3 < 0$, либо $4\sqrt{2x^4 + x^3} > \sqrt{2}|x + 4x^2 - 8|$. Осталось решить полученные неравенства.

6. 26; $\left[42; \frac{253 + 84\sqrt{3}}{8} \right]$.

Периметр сечения многогранника плоскостью, отстоящей от основания $A'B'C'D'$ (размером 6×7) на расстояние $x \in [0; h]$, где h – высота исходного параллелепипеда, представляет собой линейную функцию $P(x)$, так как сечение каждой из восьми перечисленных в условии граней есть отрезок, длина которого линейно зависит от x . Поэтому из равенств $P(0) = P(h) = 26$ следует, что функция $P(x)$ есть константа, равная 26.

Аналогично, площадь сечения $S(x)$ – квадратичная функция, удовлетворяющая равенствам $S(0) = S(h) = 42$, поэтому она достигает экстремума в точке $\frac{h}{2}$, т.е. когда плоскость сечения равноудалена от оснований (на рисунке 7

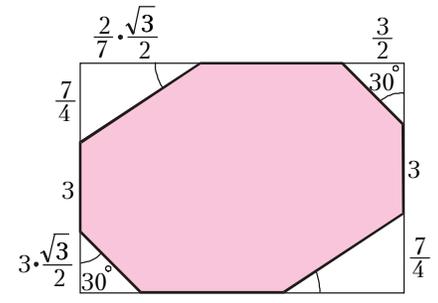


Рис. 7

удалена от оснований (на рисунке 7 изображен вид «сверху»). Это сечение представляет собой 8-угольник, площадь которого равна

$$S\left(\frac{h}{2}\right) = \left(\frac{7}{2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \right) \left(3 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{4} \right) - \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{253 + 84\sqrt{3}}{8} > 42.$$

Вариант 3

1. 12. 2. $\left\{ \left(\arccos\left(\frac{27}{28}\right) + 2\pi n; \pi + \arcsin\left(\frac{17}{28}\right) + 2\pi n \right) \right\}$