Материалы вступительных экзаменов 2001 года

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент-2001», март)

1. Решите уравнение

$$3x-2\left|x-2\right|=3\sqrt{3x+18}-2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_{\left(21+4x-x^2\right)}(7-x)}{\log_{(x+3)}\left(21+4x-x^2\right)}<\frac{1}{4}.$$

3. В трапеции $ABCD$ с боковой стороной $CD=30$ диагонали пересекаются в точке E, а углы AED и BCD равны. Окружность радиуса 17, проходящая через точки C, D и E, пересекает основание AD в точке F и касается прямой BF. Найдите высоту трапеции и ее основания.

4. Можно ли подобрать числа A, B, φ, ψ так, чтобы выражение

$$\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2\right)^2+A\cos(x+\varphi)+B\sin(2x+\psi)$$

принимало при всех x одно и то же значение C? Если да, то какие значения может принимать константа C?

5. Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ с высотой $\frac{4}{7}$ служит треугольник ABC, в котором $AB=BC=1$ и $AC=\frac{3}{7}$. Через точку пересечения диагоналей грани $ACC'A'$ на расстоянии $\frac{4}{13}$ от точки A проводится плоскость, делящая объем призмы пополам. Какова наибольшая площадь сечения призмы такой плоскостью?

6. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\le 0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 2

(механико-математический факультет, июль)

1. Решите неравенство

$$x\ge\log_2\left(101\cdot 10^x-10^{2+2x}\right)-\log_5\left(101\cdot 2^x-5^{2+x}\cdot 2^{2+2x}\right).$$

2. Имеет ли уравнение

$$12\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\left|4-5\cos x\right|$$

хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$?

3. Через вершины A, B, C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB=3$ и $BC=5$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E, причем $BE=9$. Найдите диагональ BD.

4. Найдите все трехзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр на 517.

5. Найдите все числа, которые не могут быть корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4+x^3}=a\sqrt[4]{4-a^4}\left(x+4x^2-8\right)$$

ни при каком значении параметра a.

6. Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ повернули в плоскости ABC на угол 30° вокруг точки пересечения диагоналей AC и BD (вершина A повернулась в направлении вершины D), а боковые грани заменили гранями $AA'B$, $A'B'B$, $BB'C$, $B'C'C$, $CC'D$, $C'D'D$, $DD'A$ и $D'A'A$. Найдите все значения, которые могут принимать периметр и площадь сечения полученного многогранника плоскостью, параллельной плоскости ABC, если периметр прямоугольника $ABCD$ равен 26, а его площадь равна 42.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-2001», апрель)

1. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 27, а сумма первых пяти членов равна 80. Сумма какого числа первых членов прогрессии равна 486?

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases}3\sin x+\cos y=0,\\ 6\cos x-2\sin y=7.\end{cases}$$

3. Из пункта A в пункт B выехал первый велосипедист. Одновременно с ним с такой же скоростью из B в A выехал второй велосипедист. Через некоторое время первый велосипедист увеличил скорость на 10 км/ч. Если бы первый велосипедист сразу двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым велосипедистом состоялась бы на три часа раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 180 км, в момент изменения скорости первым велосипедистом расстояние между ними и вторым велосипедистом было меньше 70 км, на весь путь из A в B первый велосипедист затратил 15 ч. Найдите первоначальную скорость велосипедистов.

4. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, длина диагонали BD равна 12. Расстояние между