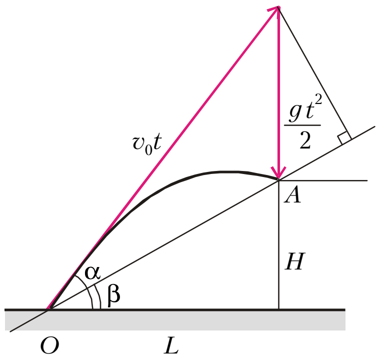

Рис. 7

Задача 5. *На крышу дома высотой H с расстояния L от него мальчик хочет забросить мяч. При какой минимальной величине начальной скорости $v_{0\,\min}$ это возможно? Под каким углом α_* следует в этом случае бросить мяч? Ускорение свободного падения равно g. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.*

Через точки старта и окончания полета (рис.7) проведем прямую OA, которая образует угол β с горизонтальной прямой. Перемещение мяча за время полета t равно

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

(считаем $\vec{r}_0 = \vec{0}$). Как видим, проекции векторов $\vec{v}_0 t$ и $\vec{g} t^2/2$ на направление нормали к прямой OA равны:

$$v_0 t \sin(\alpha - \beta) = \frac{gt^2}{2}\cos\beta ,$$

откуда находим продолжительность полета мяча:

$$t = \frac{2v_0}{g}\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} .$$

Далее, из рисунка 7 следует, что алгебраическая сумма проекций векторов $\vec{v}_0 t$ и $\vec{g} t^2/2$ на прямую OA равна расстоянию от точки старта до точки окончания полета:

$$\sqrt{H^2+L^2} = v_0 t\cos(\alpha-\beta) - \frac{gt^2}{2}\sin\beta .$$

С учетом выражения для времени полета последнее соотношение перепишем в виде

$$\sqrt{H^2+L^2} = \frac{v_0^2}{g\cos^2\beta}\left(\sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta\right).$$

Наименьшему значению начальной скорости соответствует угол бросания α_* такой, при котором множитель в скобках в последнем соотношении принимает наибольшее значение:

$$\sin(2\alpha_* - \beta) = 1,\ 2\alpha_* - \beta = \frac{\pi}{2},\ \alpha_* = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} .$$

Тогда

$$v_{0\,\min}^2 = g\sqrt{H^2+L^2}\,\frac{\cos^2\beta}{1-\sin\beta} .$$

С учетом равенства $\operatorname{tg}\beta = H/L$ получаем

$$v_{0\,\min}^2 = g\left(\sqrt{H^2+L^2} + H\right),$$

и окончательно

$$v_{0\,\min} = \sqrt{g\left(\sqrt{H^2+L^2} + H\right)} .$$

Задача 6. *Из точек A и B, находящихся на одной горизонтальной прямой, одновременно бросили два камня с одинаковыми по модулю скоростями $v_0 = 20$ м/с. Один из камней полетел по навесной траектории, другой – по настильной, но каждый попал в точку старта другого камня. Известно, что в точке A угол бросания $\alpha = 75^\circ$. Через какое время τ после старта расстояние между камнями станет минимальным? Чему равно это расстояние?*

Рассмотрим полет камня, брошенного из точки A. Повторяя построения, выполненные в начале решения предыдущей задачи (с учетом того, что точки начала и окончания полета лежат на одной горизонтальной прямой), находим продолжительность полета:

$$t = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha$$

и расстояние между точками A и B:

$$L = v_0 t\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha .$$

Аналогично, для камня, брошенного из точки B:

$$L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\beta .$$

Сравнивая выражения для L, получаем

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta ,$$

или, поскольку по условию $2\alpha + 2\beta = \pi$,

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} .$$

Далее, выберем в качестве тела отсчета камень, вылетевший из точки A, и свяжем с ним систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лаборатории. Скорость второго камня в этой системе $\vec{u}$ найдем из правила сложения скоростей:

$$\vec{u} = \vec{v}_2(t) - \vec{v}_1(t) = \left(\vec{v}_{02} + \vec{g}\,t\right) - \left(\vec{v}_{01} + \vec{g}\,t\right) = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01} ,$$

т.е. в подвижной системе второй камень движется равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\vec{u} = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01} ,$$

равной начальной относительной скорости. Так как $\vec{v}_{02} \perp \vec{v}_{01}$ и $v_{01} = v_{02} = v_0$, вектор $\vec{u}$ есть диагональ квадрата, построенного на векторах $\vec{v}_{02}$ и $-\vec{v}_{01}$, поэтому $u = \sqrt{2}v_0$.

Рис. 8

Обратимся к рисунку 8, иллюстрирующему относительное движение. Из рисунка находим кратчайшее расстояние между камнями – длину катета AC в прямоугольном треугольнике ACB, где угол при вершине B равен $\delta = \alpha - 45^\circ = 30^\circ$:

$$AC = L\sin\delta = \frac{L}{2} = 10 \text{ м}.$$

Максимальное сближение камней произойдет в момент времени

$$\tau = \frac{AC}{u\operatorname{tg}\delta} \approx 0{,}6 \text{ с}.$$

Задача 7. *С горизонтальной поверхности земли бросили мяч, и он упал на землю со скоростью $v = 9{,}8$ м/с под углом $\beta = 30^\circ$ к горизонту. Величина вертикальной составляющей скорости в точке бросания на 20% больше, чем в точке падения. Найдите продолжительность t полета. Считайте силу сопротивления пропорциональной скорости мяча:*