снаряда, мала. Тогда в первом приближении можно считать, что «внутри Земли» снаряд летит по прямой с постоянной скоростью v, а $\varphi \approx 2\alpha$. Таким образом, искомое расстояние равно

$$L = R\varphi \approx 2R\alpha .$$

Так как $2\alpha = 6^\circ \approx 0{,}1$ рад, то

$$L \approx 0{,}1 \cdot 6400 \text{ км} \approx 640 \text{ км}.$$

Можно попытаться оценить величину L другим, более точным, способом, учитывая силу притяжения снаряда к центру Земли. После падения снаряд будет двигаться по участку траектории «внутри Земли» и пролетит его с почти постоянной по величине скоростью за время $\Delta t \approx L/v$. За это время вектор скорости повернется на угол $\Delta\varphi = \varphi - 2\alpha$ (см. рисунок), причем этот поворот возникает из-за действия силы притяжения Земли на снаряд во время его полета «внутри Земли». Поскольку сила притяжения почти перпендикулярна скорости, приращение скорости снаряда равно $\Delta v \approx v\Delta\varphi \approx g\Delta t \approx gL/v$. Таким образом,

$$\Delta\varphi \approx \frac{gL}{v^2} \approx \frac{L}{R} - 2\alpha ,$$

откуда

$$L \approx \frac{2\alpha R}{1 - \dfrac{gR}{v^2}} \approx 1780 \text{ км}. \qquad (*)$$

Отметим, что вычисление по этой формуле дает результат, который очень близок к точному значению $L \approx 1859$ км (итог численного расчета для полета снаряда по эллиптической траектории при $g = 10$ м/с^2, $R = 6400$ км).

Формулу $(*)$ можно получить и другим способом. Небольшой участок траектории, проходящий «внутри Земли», на всем своем протяжении имеет приблизительно одинаковый радиус кривизны $R_{\text{кр}}$ (см. рисунок). Его можно найти из условия примерного равенства вблизи поверхности Земли центростремительного ускорения снаряда $v^2/R_{\text{кр}}$ и ускорения свободного падения g, откуда

$$R_{\text{кр}} \approx \frac{v^2}{g} = 10^7 \text{ м} = 10000 \text{ км}.$$

Если из центра кривизны C данного участка траектории провести два радиуса кривизны – в точку падения A и в точку вылета B снаряда, то векторы скоростей снаряда $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в этих точках будут перпендикулярны проведенным радиусам. Углы между этими радиусами CA и CB и радиусами Земли OA и OB, проведенными из центра Земли O в те же точки, будут равны α, так как первые перпендикулярны векторам скорости, а вторые – касательным к поверхности Земли. Поскольку угол ACB равен углу поворота вектора скорости $\Delta\varphi$, а угол $\varphi/2$ является внешним углом для треугольника AOC, то

$$\frac{\varphi}{2} = \alpha + \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Замечая, что

$$R\varphi \approx R_{\text{кр}}\Delta\varphi \approx \frac{v^2}{g}\Delta\varphi ,$$

находим

$$\varphi = 2\alpha + \frac{gR}{v^2}\varphi ,$$

откуда

$$\varphi = \frac{2\alpha}{1 - \dfrac{gR}{v^2}},$$

и для $L = R\varphi$ получаем прежнюю формулу $(*)$.

А.Андрианов

Ф1794. *По гладкой горизонтальной поверхности скользит гантелька – легкий жесткий стержень длиной L, на концах которого закреплены точечные массы M и 2M. В некоторый момент скорость легкого конца равна по величине v, а скорость тяжелого конца в два раза больше. Какой может быть сила натяжения стержня при движении гантельки?*

Стол гладкий – поэтому центр масс гантельки движется с постоянной скоростью и угловая скорость вращения тоже остается постоянной. Для вычисления силы натяжения стержня нужна только угловая скорость, а поступательное движение гантельки несущественно. Проекции мгновенных скоростей концов гантельки на стержень должны быть одинаковы – это единственное условие, которое обязательно должно выполняться. Самая большая угловая скорость получается в том случае, когда скорости концов перпендикулярны гантельке и направлены в противоположные стороны, а самая маленькая – при том же условии, но одинаково направленных скоростях. Это легко объяснить, например, для первого случая. Пусть одна из скоростей направлена не под прямым углом к стержню. Тогда придется «повернуть» и скорость другого конца – при этом угловая скорость уменьшится. А теперь – простой расчет. Максимальная угловая скорость равна $\omega_1 = 3v/L$, сила натяжения составляет

$$F_{\max} = M\omega_1^2 \cdot \frac{2L}{3} = \frac{6Mv^2}{L}.$$

Минимальная угловая скорость в 3 раза меньше, а сила натяжения меньше, соответственно, в 9 раз:

$$F_{\min} = \frac{F_{\max}}{9} = \frac{2Mv^2}{3L}.$$

З.Рафаилов

Ф1795. *Центр тяжести спортивного автомобиля находится на равных расстояниях от передних и задних колес. Если при торможении зажимать колодками только задние колеса, то длина тормозного пути оказывается L_1, если только передние – то L_2 (при той же начальной скорости автомобиля). Найдите длину тормозного пути в том случае, когда колодками зажимают и передние и задние колеса.*

Пусть центр масс автомобиля расположен на высоте h относительно полотна дороги, а расстояние между осями передних и задних колес равно l (см. рисунок). Для случая торможения задними колесами запишем уравнение мо-