Бревно в шалаше

К.ОСИПЕНКО, А.СПИВАК, В.ТИХОМИРОВ

Каков цилиндр максимального объема, который можно вписать в данный конус?[1] Этот вопрос можно найти во многих учебниках алгебры и математического анализа. В статье «Кеплер и винные бочки – австрийские и рейнские» («Квант» №6 за 2000 год) он был сформулирован в качестве упражнения: *«В данный конус впишите цилиндр максимального объема, ось которого совпадает с осью конуса»*.

Зачем нужны слова «ось которого совпадает с осью конуса»? Нельзя ли их вычеркнуть? Другими словами, верно ли, что ось цилиндра максимального объема, который можно разместить внутри данного конуса, параллельна оси конуса? Скорее всего, верно. Но доказывать это мы не умеем: задача о произвольном (наклонно расположенном) цилиндре оказалась неожиданно сложной, и решить ее мы не смогли. А вот разобраться с цилиндром, ось которого параллельна основанию конуса, удалось. Решение и ответ этой задачи оказались несколько громоздкими, но поучительными. При этом потребовалось вычислить расстояние от точки, лежащей на оси симметрии гиперболы, до самой этой гиперболы.

А где гипербола, там и эллипс, и парабола. Так эта статья, начав с вопроса, можно ли сэкономить слова «ось которого совпадает с осью конуса», несколько разрослась. Разумеется, можно было изложить решение задачи о «лежачем» цилиндре максимального объема и без таких больших отступлений в сторону. Но мы надеемся, что всякий, кто имеет склонность к математике, будет рад познакомиться с классическими понятиями и результатами, которые в изобилии встретятся на нашем пути. Вы научитесь вычислять расстояния от точки до параболы, эллипса, гиперболы, узнаете, как связаны астроида и эллипс, парабола и полукубическая парабола.

Эта статья может быть интересна даже одиннадцатикласснику-абитуриенту, которому не интересно ничего на свете, кроме экзаменов в вуз, выбранный им и еще не выбравший его. Ведь в конце концов задача о максицилиндре (и похожая на нее задача о миниконусе, которая тоже будет решена нами) – это «задача с параметром», правда довольно сложная.

«Стоячий» и «лежачий» максицилиндры

«Стоячий» цилиндр

Пусть $OA = R$ и $OS = H$ – радиус основания и высота прямого кругового конуса, $OL = x$ и $LM = y$ – радиус основания и высота вписанного цилиндра (рис.1). Тогда в силу подобия треугольников получаем: $y/H = AM/AS$ и $x/R = MS/AS$, так что

$$\frac{y}{H} + \frac{x}{R} = \frac{AM}{AS} + \frac{MS}{AS} = 1.$$

Объем цилиндра равен

$$V = \pi x^2 y = \pi x^2 H\left(1 - \frac{x}{R}\right) = \frac{\pi H}{R}\left(x^2 R - x^3\right).$$

Мы свели задачу к нахождению максимума функции

$$f(x) = x^2 R - x^3$$

на интервале $(0;\ R)$. Эта функция обращается в ноль на концах отрезка $[0;\ R]$, а производная

$$f'(x) = 2xR - 3x^2$$

на интервале $(0;\ R)$ равна нулю лишь в точке $x = 2R/3$. (График функции f изображен на рисунке 2.) Значит, максимальный объем «стоячего» цилиндра равен

A

Рис.1

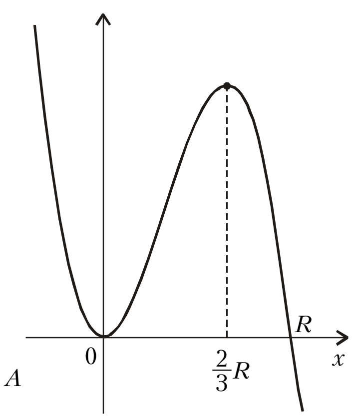

Рис.2

$$V = \frac{\pi H}{R} f\left(\frac{2}{3}R\right) = \frac{4}{27}\pi R^2 H.$$

«Лежачий» цилиндр

На первый взгляд кажется, что задача о «лежачем» цилиндре столь же проста. Ведь если r и $2h$ – радиус основания и высота вписанного в конус «лежачего» цилиндра, ось которого параллельна основанию конуса (на рисунке 3 изображено осевое сечение), то

$$\frac{h}{R} + \frac{2r}{H} = \frac{SK}{SA} + \frac{KA}{SA} = 1,$$

откуда $h = R\left(1 - \frac{2r}{H}\right)$. Объем цилиндра равен

$$2\pi h r^2 = 2\pi r^2 R\left(1 - \frac{2r}{H}\right) = \frac{2\pi R}{H}\left(r^2 H - 2r^3\right).$$

[1] *Цилиндры и конусы в этой статье – прямые круговые.*