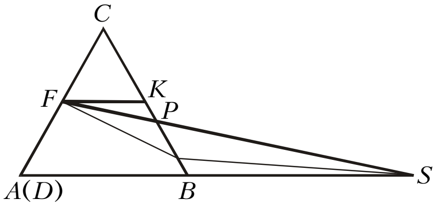

Рис. 5

среднюю линию треугольника ABC. Пользуясь подобием треугольников FKP и BPS, нетрудно получить, что $BP = \frac{2}{5}BC$.

6. 1) $\arccos\frac{47}{121}$; 2) $\frac{36}{\sqrt{259}}$; 3) $\frac{8}{3}$. *Указание.* Вычислите длины ребер и апофем пирамиды $ABCD$. Проведите отрезок $A_1F \| AC_1$ (рис.6) и найдите его длину. Угол FA_1B определите, пользуясь теоремой косинусов для ΔA_1FB. Расстояние l между прямыми BA_1 и AC_1 найдите из формулы для объема пирамиды $V = abl\cos\varphi/6$ (где a, b – длины скрещивающихся ребер пирамиды, l – расстояние, а φ – угол между ними), примененной к пирамиде AA_1C_1B, объем которой равен $1/4$ объема пирамиды $ABCD$. (В самом деле, $S_{AA_1C_1} = \frac{1}{4}S_{ADC}$, а высота из вершины B совпадает с высотой $ABCD$). Для вычисления радиуса r сферы следует заметить, что ее центр I лежит на высоте DO. Затем из треугольника A_1ID по теореме косинусов можно выразить A_1I через r, после чего воспользоваться равенством $HB = BO = 8$ (H – точка касания сферы с BA_1) и тем, что $A_1H + HB = A_1B$.

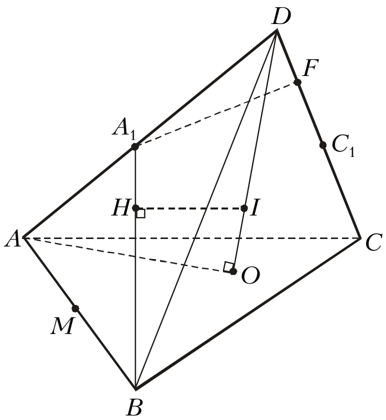

Рис. 6

Вариант 2

1. 6; –2. *Указание.* Выполните замену $t = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$.

2. $\pi/7 + \pi n$, $3\pi/7 + \pi n$, $5\pi/7 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Достаточно найти решения на промежутке $[0;\pi)$, на котором уравнение равносильно уравнению $\cos(7x/2)\sin(x/2) = 0$, $x \neq \pi n/3$.

3. $\left(-11;\ -1-3\sqrt{11}\right)\cup\left[-\sqrt{79};\ 7\right]\cup\left[43/5;\ \sqrt{79}\right]\cup\left(-1+3\sqrt{11};\ 9\right)$.

Указание. С помощью замены $z = \log_{20-2x}\left(99 - 2x - x^2\right)$ неравенство приводится к виду $z + \frac{2}{z} \leq 3$.

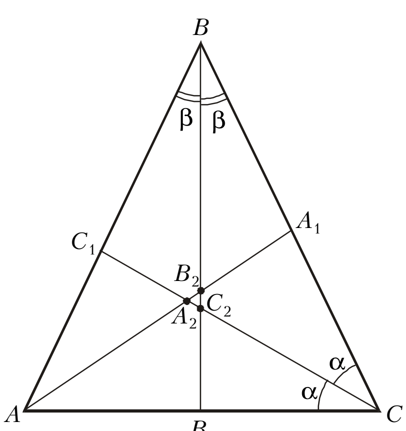

Рис. 7

4. 1) $3\sqrt{35}/7$; 2) $4\sqrt{35}/105$. *Указание.* Найдите в каких отношениях делятся отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 точками A_2, B_2, C_2 (рис.7), а затем вычислите отношение площадей треугольников $A_2B_2C_2$ и BC_2C к площади треугольника ABC.

5. $\left(\pm 2\sqrt{2}/3;\ 1 \mp \sqrt{2}\right)$. *Указание.* Умножая первое неравенство на 4 и складывая его со вторым, получаем

$$4y^2 + 12xy + 9x^2 - 4(2y + 3x) + 4 \leq 0,$$

$$(2y + 3x - 2)^2 \leq 0,$$

откуда $3x = 2 - 2y$, $y^2 + 3xy + 1 = 0$.

6. $R \geq r + \frac{2r}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{R\left(R - r - \sqrt{R^2 - 2Rr - r^2/3}\right)}{r - \sqrt{R^2 - 2Rr - r^2/3} + R}$.

Из сечения $O_1O_2O_3$ (рис.8,*а*), где O_i – центры шаров радиуса r, получаем, что $R \geq AH = AO_1 + O_1H$, H – центр равностороннего треугольника $O_1O_2O_3$. По свойству касающихся шаров имеем $AO_1 = r$, $O_1H = \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{O_1O_2}{2} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, $R \geq r + \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

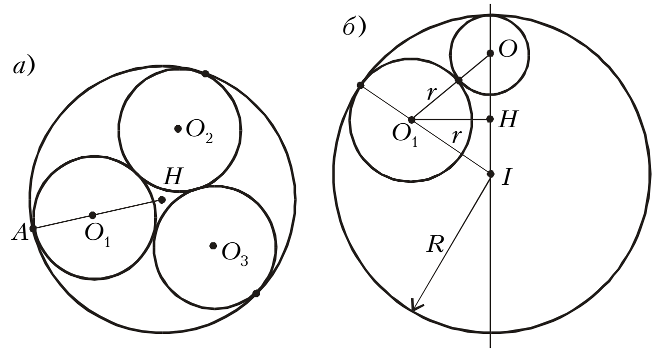

Рис. 8

Пусть I – центр сферы радиуса R (рис.8,*б*), O – центр искомого шара, а x – его радиус. Из условия $IO - IH = OH$ и соотношений

$$IH = \sqrt{IO_1^2 - O_1H^2} = \sqrt{(R-r)^2 - 4r^2/3},$$

$$IO = R - x,$$

$$OH = \sqrt{OO_1^2 - O_1H^2} = \sqrt{(r+x)^2 - 4r^2/3}$$

получаем уравнение

$$R - x - \sqrt{(R-r)^2 - 4r^2/3} = \sqrt{(r+x)^2 - 4r^2/3}.$$

Вариант 3

1. $(-\infty;\ -3]\cup\left[-1;\ \left(-1+\sqrt{17}\right)/8\right)$.

2. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2 + pn$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Левая часть уравнения равна $\operatorname{tg}x$ при $\cos 2x + \cos 3x \neq 0$.

3. $A_1A_2 = 7$, $B_1B_2 = 5$, $AB_1 = 6$, $AB = 12$, $BB_1 = 6\sqrt{3}$.

4. 1) 25/27; 2) $2\sqrt{2}/15$;

3) $\arcsin\frac{12}{5\sqrt{17}}$. *Указание.* Поскольку $EF \| BD$ (рис.9), плоскость EFK пересекает плоскость SBD по прямой $MN \| BD$, а в сечении образуется пятиугольник $EMKNF$. Пусть P и G – середины EF и MN соответственно, L – проекция точки

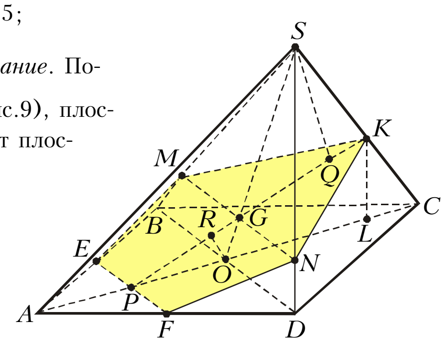

Рис. 9