$a = b = c = d = 42$, что противоречит условию задачи. В случае $k = 5$ находим $a = 69$, $b = 15$, $c = 49$, $d = 35$; в случае $k = 7$ получаем $a = 15$, $b = 69$, $c = 35$, $d = 49$. И в том, и в другом случае у кого-то – Бабы или Табриза – оказываются 7 костей с наименьшей суммой очков 15, а у другого – 7 костей с наибольшей суммой очков 69. Таким образом, у Бабы и Табриза на руках обязательно окажутся следующие 12 костей:

$$0\times0,\ 1\times0,\ 1\times1,\ 2\times0,\ 2\times1,\ 3\times0,$$
$$6\times6,\ 6\times5,\ 6\times4,\ 6\times3,\ 5\times5,\ 5\times4.$$

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. Вася ошибся в расчетах. Среди 13 столбиков, насчитанных им при ходьбе в одну сторону, должно быть 6 троек столбиков с высотой 1 м, 2 м и 3 м, а также одна пара столбиков с высотой 1 м и 2 м или 2 м и 3 м. В любом случае при ходьбе в обратную сторону Вася должен был насчитать 6 пар столбиков, высота в которых возрастала, а это противоречит условию.

2. Поскольку в уменьшаемом и вычитаемом сумма цифр одинакова, то они имеют одинаковые остатки при делении на 9. Следовательно, их разность делится на 9, и профессору Мумбуму-Плюмбуму не удастся найти простое число указанного вида.

3. Пусть в больнице находятся a врачей и b больных, причем сумма температур врачей равна A, а сумма температур больных равна B. По условию,

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} = 2\cdot\frac{A+B}{a+b}.$$

Это равенство несложно преобразовать к виду

$$ab(b-a)\left(\frac{A}{a} - \frac{B}{b}\right) = 0.$$

Поскольку $\frac{A}{a} \ne \frac{B}{b}$, заключаем, что $a = b$. Итак, врачей и больных в больнице одинаковое количество.

4. *Ответ*: 8. Все 22 ученика, писавшие слово «КРОТ», написали либо «КОТ», либо «РОТ». Все остальные либо написали правильное слово, либо написали слово «ОТ». Таким образом, из 30 написанных слов «КОТ» и «РОТ» 22 раза эти слова написаны по ошибке, а остальные 8 раз – правильно.

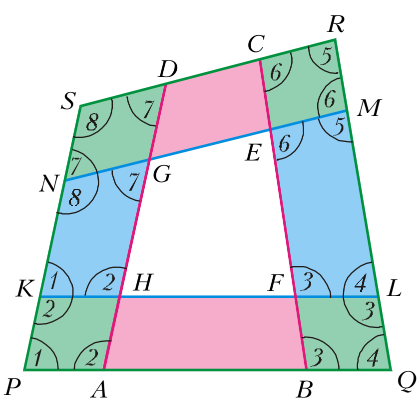

Рис. 2

5. Введем обозначения, показанные на рисунке 2. Всякий параллелограмм с равными высотами является ромбом, поэтому по четырем углам рисунка 2 расположены ромбы. Из трапеций, обрамляющих внутренний четырехугольник на рисунке 2, образуем вытянутый параллелограмм, показанный на рисунке 3. Две равные противоположные стороны этого параллелограмма образуют периметры заданных в условии задачи четырехугольников. В этом нетрудно убедиться, привлекая соотношения

$$PQ = PA + AB + BQ = HA + AB + BF,$$
$$RS = RC + CD + DS = EC + CD + DG.$$

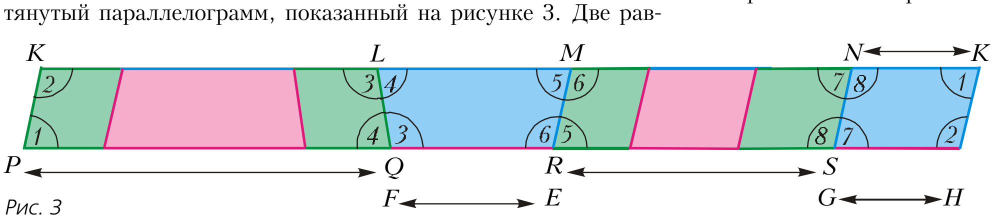

Рис. 3

Характерные задачи вступительных экзаменов по физике в МФТИ

1. $F_{min} = (M+m)g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)/2$.

2. $m_{O_2} = 4\pi R_3^2 \rho RT/(\mathrm{M}g) \approx 10^{18}$ кг, где $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная, $\mathrm{M} = 32$ г/моль – молярная масса кислорода.

3. $p = B_0^2 ba^2/(2R)$.

4. $v = 2\pi R\Gamma/T \approx 0{,}06$ см/с, где $\Gamma = 0{,}4$ – увеличение линзы, $T = 60$ с – период обращения секундной стрелки.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\left(0;\ \log_2\frac{128}{71}\right)$, $\left(2\log_2 7 - 6;\ 4 - \log_2 7\right)$. *Указание.* Из второго уравнения после возведения в квадрат получаем, что либо $x = 0$, либо $y = 1 - x/2$.

2. $\pi n/2$, $\pm\pi/3 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание*. Применяя формулы

$$\cos^3 x = (1/4)\cos 3x + (3/4)\cos x,$$
$$\sin^3 x = (3/4)\sin x + (1/4)\sin 3x,$$

приведем уравнение к системе

$$\begin{cases} \sin 4x = 4\sin 2x\cos 2x\cos x, \\ \cos 2x \ne 0. \end{cases}$$

3. $(-\infty; -1)\cup\{0\}\cup(4; +\infty)$. *Указание.* Неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-3x} > 2, \\ \sqrt{x^2-2x+4} \le 2 - \sqrt{x^2-3x}. \end{array}\right.$$

4. $AC = 32\sqrt{3/35}$, $BC = 4\sqrt{6/5}$, $R = 3\sqrt{7/10}$. *Указание.* Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \angle ADB = \beta$, $\angle BCD = \gamma = \alpha + \beta$ (рис.4). Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ и $\sin\gamma$, а затем несколько раз примените теорему синусов для треугольников ABC и BCD.

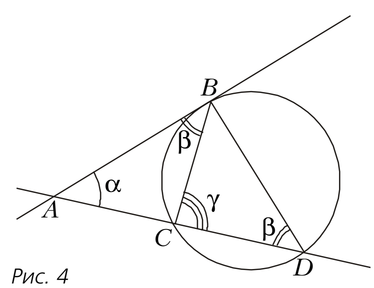

Рис. 4

5. Оптимальный путь состоит из двух отрезков: SP и PF, где $P \in BC$, $PB = 2BC/5$. *Указание.* Наложим грань BCD на грань ABC так, чтобы ребро BC осталось на месте, а точка D попала в точку A (рис.5). В результате путь муравья превратится в ломаную линию, соединяющую точки S и F. Длина пути минимальна, если ломаная станет отрезком, соединяющим точки S и F. Отрезок SF пересекает BC в точке P. Проведем FK –