А вот пример другого рода.

Пример 19. *Решите неравенство* $\sqrt{3-x^2}+\sqrt{x+1}\ge\sqrt{x^2-1}$.

Решение. Найдем ОДЗ: $x=-1$; $1\le x\le\sqrt{3}$.

Сначала убедимся прямой подстановкой, что $x=-1$ – решение нашего неравенства. Далее, при $1\le x\le\sqrt{3}$ выполняются неравенства $\sqrt{3-x^2}\ge 0$ и $\sqrt{x+1}\ge\sqrt{2}$, но $\sqrt{x^2-1}\le$ $\le\sqrt{2}$, поэтому данное неравенство выполняется на всей своей области определения.

Ответ: $x=-1$; $1\le x\le\sqrt{3}$.

Похожие идеи лежат в основе решения и следующей задачи.

Пример 20. *Решите неравенство* $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}+x>3$.

Решение. ОДЗ исходного неравенства: $x<-2$; $x>2$. Заметим, что отрицательные значения неизвестного не могут быть решениями задачи, так как тогда отрицательная левая часть неравенства не может быть больше положительной правой; таким образом, из ОДЗ осталось исследовать только случай $x>2$. Но тогда $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-4}}>1$ (поскольку числитель дроби, очевидно, больше знаменателя); итак, первое слагаемое левой части больше 1, а второе больше 2, поэтому их сумма – вся левая часть данного неравенства – больше 3, что и требуется.

Ответ: $x>2$.

Таким образом, мы убедились в том, что иногда полезно найти область определения данного неравенства (или, что то же самое, его ОДЗ) и непосредственно исследовать ситуацию на этой области – оценить значения его левой и правой частей.

Упражнения. Решите неравенства.

32. $\sqrt{x-2}+5\sqrt{2x-1}\le 3\sqrt{3-2x}$.

33. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{x-1}\le 2$.

34. $|x|+\sqrt{x^2-1}\ge 1$. **35.** $\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x^2}+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}>1$.

36. $\frac{\lg(|x|+1)}{\lg(|x|-1)}+\sqrt{x^2-4}>1$. **37.** $\sqrt{x-2}+2^x>9$.

38. $4^{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}<0$. **39.** $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$.

ВАРИАНТЫ

Материалы вступительных экзаменов 2001 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2^{x+y+1}+7\cdot 2^{y-5}=4,\\ \sqrt{2x+y^2}=x+y.\end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos^3 x\sin 3x}{\cos 2x}+\frac{\sin^3 x\cos 3x}{\cos 2x}=3\sin 2x\cos x.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{2-\sqrt{x^2-3x}}\le\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}.$$

4. Через точку A проведены две прямые: одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что точка C лежит на отрезке AD. Найдите AC, BC и радиус окружности R, если $BD=5$, $\angle BAC=\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\angle BDC=\arccos\sqrt{\frac{5}{21}}$.

5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскую поверхность. Точка F – середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $2AB=BS$ и точка B лежит между A и S. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

6. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота пирамиды $DO=6$. Точки A_1, B_1, C_1 – середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найдите 1) угол между прямыми BA_1 и AC_1; 2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1; 3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-8x+25}-\sqrt{x^2-4x+13}=2.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}3x=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2x}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{20-2x}\left(99-2x-x^2\right)+\log_{\sqrt{99-2x-x^2}}(20-2x)\le 3.$$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB=BC=6$ и $AC=2$, проведены медиана AA_1, высота BB_1 и биссектриса CC_1. Найдите площадь треугольника, образованного пересечением прямых 1) BB_1, CC_1 и BC; 2) AA_1, BB_1 и CC_1.