ятельство можно считать признаком, по которому можно оценивать целесообразность применения такого приема.

Вы, возможно, заметили, что последний пример получен из примера 9 нашей статьи «Иррациональные уравнения» (см. «Квант» №5 за 2001 г.) заменой знака равенства на знак неравенства. Ниже помещено несколько упражнений, часть из них получена тем же способом. Вы можете аналогично использовать и остальные задачи соответствующего раздела указанной статьи.

Упражнения. Решите неравенства.

21. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$. **22.** $\sqrt{3x}-\sqrt{1+x}<1-2x$.

23. $\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x}>\dfrac{2x^2-x-1}{2}$.

24. $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}>\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}$.

Использование некоторых свойств функций

Начнем с примера.

Пример 16. *Решите неравенство* $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}<6$.

Решение. Заметим, что левая часть неравенства – возрастающая функция (этот достаточно очевидный факт в случае необходимости, например на экзамене, легко доказать). Угадав, при каком значении x левая часть равна правой (конечно, при $x=5$), и учтя ОДЗ исходного неравенства ($x\ge 1$), можно записать ответ.

Ответ: $1\le x<5$.

Мы не выписали подробно рассуждение, которое привело к ответу: поскольку левая часть – возрастающая функция (обозначим ее через $f(x)$), при $1\le x<5$ имеем $f(5)<f(x)=$ $=6$, т.е. данное неравенство выполняется, а при $x\ge 5$ по той же причине (из-за возрастания функции) $f(5)\le f(x)$, т.е. данное неравенство не выполняется; так как исследование проведено при всех допустимых значениях x, решение закончено.

Рассуждая аналогично, можно выписать общее применяемое в этих случаях утверждение:

Пусть на промежутке $(a;\,b)$ задана возрастающая функция $y=f(x)$ и требуется решить неравенство $f(x)<c$ (или $f(x)>c$). Если x_0 – корень уравнения $f(x)=c$, причем $a<$ $<x_0<b$, то решения данного неравенства – весь промежуток $(a;x_0)$ (соответственно, промежуток $(x_0;b)$). (Единственность корня следует из монотонности функции f.) Понятно, что если требуется решить нестрогое неравенство, то при том же рассуждении в ответ войдет и число $f(x_0)$, а если функция задана на замкнутом или на полуоткрытом промежутке, то в ответ войдут соответствующие концы промежутка.

Пример 17. *Решите неравенство*

$$\sqrt[4]{x-2}+\sqrt{x-3}>\sqrt{2-\sqrt[4]{x}}.$$

Решение. Найдем допустимые значения переменного:

$$\begin{cases} x-2\ge 0,\\ x-3\ge 0,\\ 2-\sqrt[4]{x}\ge 0,\\ x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow 3\le x\le 16.$$

Левая часть данного неравенства (обозначим ее через $f(x)$) — возрастающая функция, правая (назовем ее $g(x)$) – убывающая. При $x=3$ имеем

$$f(3)=1>g(3)=\sqrt{2-\sqrt[4]{3}},$$

т.е. данное неравенство выполняется. Но при увеличении x левая часть становится (в силу возрастания) еще больше, а правая (из-за убывания) – еще меньше, т.е. неравенство между соответствующими значениями функций $f(x)$ и $g(x)$ сохранится.

Ответ: $3\le x\le 16$.

В примере 17 мы встретились с новой ситуацией: надо было на промежутке $[a;\,b]$ решить неравенство $f(x)>g(x)$, где левая часть возрастала, а правая убывала. Мы выяснили, что на левом конце промежутка неравенство выполняется, и сделали вывод, что тогда оно выполняется и на всем промежутке. В несколько более общей ситуации можно сформулировать такое обобщение нашего стандартного рассуждения:

Пусть на промежутке $(a;\,b)$ заданы возрастающая функция $y=f(x)$ и убывающая функция $y=g(x)$ и требуется решить неравенство $f(x)>g(x)$. Если x_0 – корень уравнения $f(x)=g(x)$, лежащий на рассматриваемом промежутке, то решения данного неравенства – все числа из промежутка $(x_0;b)$.

Упражнение 25. а) Докажите утверждение, сформулированное в предыдущем абзаце текста.

б) Рассмотрите различные варианты знаков неравенства (строгих и нестрогих, а также типов промежутков (включающих концы или нет), которые могут встретиться в рассуждении п. а), и для каждого варианта найдите ответ.

в) Рассмотрите все ситуации п. б), если на рассматриваемом промежутке не существует корня x_0 уравнения $f(x)=g(x)$.

Пример 18. *Решите неравенство*

$$\sqrt{x+\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}}-\sqrt{3}<\sqrt{x}-1.$$

Решение. Допустимые значения неизвестного – все неотрицательные числа. Заметим, что обе части данного неравенства – возрастающие функции, поэтому пока что рассматриваемый метод неприменим. Но попробуем преобразовать данное неравенство. Оно равносильно такому:

$$\sqrt{x+x\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}}-\sqrt{x}<\sqrt{3}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}+x\sqrt{x}}-1\right)<\sqrt{3}-1.$$

В последнем полученном нами неравенстве справа – константа, а слева – возрастающая функция (она равна произведению двух неотрицательных возрастающих функций). Осталось заметить, что при $x=1$ левая часть равна правой, поэтому, в силу наших стандартных утверждений, ответ – все допустимые значения x, меньшие 1.

Ответ: $0\le x<1$.

Замечания. 1) При доказательстве возрастания левой части преобразованного неравенства в примере 18 мы существенно использовали *неотрицательность* возрастающих сомножителей. Без этого условия утверждение о возрастании произведения возрастающих функций может быть неверным: например, если $x<0$, произведение возрастающей функции $y=x$ на себя – функция $y=x^2$, — как известно, убывает. 2) Для доказательства монотонности можно, конечно, использовать и производную функции.

Упражнения. Решите неравенства.

26. $x^5+2x^4+\sqrt{x}>4$. **27.** $x^{15}+3\sqrt[4]{x-1}\ge 1$.

28. $\sqrt{x+3}+3\sqrt{3x-2}<15$. **29.** $\sqrt{x}-\sqrt{1-x}>0{,}5$.

30. $\sqrt[4]{x^4+66}>x+1$, если $0<x<2$.

31. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.