Итак, если $x > -6$, данное неравенство преобразуется и решается так:

$$\begin{cases} -6 < x \le -5; x \ge 5, \\ \sqrt{x^2 - 25} < x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \le -5; x \ge 5, \\ x^2 - 25 < x^2 + 12x + 36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \le -5; x \ge 5, \\ x > -\dfrac{61}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{61}{12} < x \le -5, \\ x \ge 5. \end{array} \right.$$

Если же $x < -6$, данное неравенство выполняется, так как его отрицательная левая часть меньше положительной правой.

Ответ: $x \in (-\infty; -6) \cup \left(-\dfrac{61}{12}; -5\right] \cup [5; +\infty)$.

Решим еще одну задачу. Хотя новые идеи здесь не встречаются, важно не упустить многочисленные детали (ОДЗ, схемы и т.п.).

Пример 11. *Решите неравенство*

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Решение. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 2 \ge 0, \\ x^2 - x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2, \\ x \ge -1. \end{array} \right.$$

Поскольку обе части данного неравенства неотрицательны, после возведения его в квадрат получим неравенство, равносильное ему в ОДЗ:

$$x^2 + 3x + 2 < 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1} + x^2 - x + 1 \Leftrightarrow 2x < \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Для последнего неравенства в ОДЗ работает схема (2):

$$2x < \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ 4x^2 < x^2 - x + 1 \end{cases} \\ x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ 3x^2 + x - 1 < 0 \end{cases} \\ x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x < \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{6}, \\ x < 0. \end{array} \right. \Leftrightarrow x < \frac{\sqrt{13} - 1}{6},$$

Осталось учесть ОДЗ и получить ответ.

Ответ: $x \le -2$; $-1 \le x < \dfrac{\sqrt{13} - 1}{6}$.

И в заключение этого раздела решим три более трудные задачи. Они предлагались на вступительных экзаменах в МГУ в 1975 году: первая – на отделении политической экономии экономического факультета, вторая – на геологическом факультете, третья – на отделении экономической кибернетики экономического факультета. Из приведенных решений можно увидеть, как важно владеть хорошей техникой вычислений и преобразований, а также находить удачную замену переменной.

Пример 12. *Решите неравенство*

$$\sqrt{x - \frac{1}{2}} + \frac{x + 1}{4} < \sqrt{2x - 1 + \frac{(x + 1)^2}{8}}.$$

Решение. Заметим сначала, что ОДЗ есть луч $x \ge 0{,}5$. Затем, поскольку подкоренное выражение в правой части данного неравенства можно записать как $2\left(\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{x + 1}{4}\right)^2\right)$, удобно сделать замену переменной, причем ввести сразу две новые переменные:

$$\sqrt{x - \frac{1}{2}} = u \ge 0, \quad \frac{x + 1}{4} = v.$$

Отметим, что в ОДЗ второе новое переменное, v, положительно. Данное неравенство после замены примет вид

$$u + v < \sqrt{2\left(u^2 + v^2\right)} \Leftrightarrow u^2 + 2uv + v^2 <$$

$$< 2\left(u^2 + v^2\right) \Leftrightarrow (u - v)^2 > 0 \Leftrightarrow u \ne v.$$

Вернемся к старым переменным:

$$\sqrt{x - \frac{1}{2}} \ne \frac{x + 1}{4}.$$

Решая полученное неравенство, находим

$$x \ne 7 \pm \sqrt{20}.$$

Ответ:

$$x \in \left[\frac{1}{2}; 7 - 2\sqrt{10}\right) \cup \left(7 - 2\sqrt{10}; 7 + 2\sqrt{10}\right) \cup \left(7 + 2\sqrt{10}; +\infty\right).$$

Пример 13. *Решите неравенство*

$$\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} > -\sqrt{x - 3} - 1 + \sqrt{-x + 5}.$$

Решение. Преобразовав данное неравенство к виду

$$\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} + 1 > \sqrt{-x + 5} - \sqrt{x - 3}, \qquad (a)$$

мы добьемся, во-первых, того, что левая часть неравенства стала положительной, а во-вторых, если возвести последнее неравенство почленно в квадрат, то, поскольку в сумме подкоренных выражений правой части неизвестное уничтожится, получится неравенство, квадратное относительно $\sqrt{(x - 3)(-x + 5)}$, — это и есть основная идея нашего решения. Теперь надо ее аккуратно осуществить.

Если правая часть неравенства (a) отрицательна, все допустимые значения неизвестного будут его решениями – положительная левая его часть будет больше отрицательной правой:

$$\begin{cases} 3 \le x \le 5, \\ \sqrt{-x + 5} < \sqrt{x - 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 5, \\ -x + 5 < x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 5, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 < x \le 5.$$

Если же правая часть неравенства (a) неотрицательна, его можно в ОДЗ возвести почленно в квадрат и получить остальные решения:

$$\begin{cases} 3 \le x \le 5, \\ \sqrt{-x + 5} \ge \sqrt{x - 3}, \\ (x - 3)(-x + 5) + 2\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} + 1 > \\ > (-x + 5) - 2\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} + (x - 3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \le x \le 4, \\ (x - 3)(-x + 5) + 4\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} - 1 > 0. \end{cases} \qquad (b)$$

Решим отдельно второе неравенство системы (b), введя, как уже было сказано, обозначение $\sqrt{(x - 3)(-x + 5)} = t \ge 0$:

$$\begin{cases} t \ge 0, \\ t^2 + 4t - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0, \\ t < -2 - \sqrt{5}; t > -2 + \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow t > \sqrt{5} - 2.$$