Воспользуемся наличием в правой части неравенства (a) множителя, равного подкоренному выражению. Подкоренное выражение (и одновременно первый сомножитель правой части) неотрицательно, если $x \ge -0{,}5$; это и есть ОДЗ. Поэтому если $-0{,}5 \le x < 1$, неравенство (a) выполняется – неотрицательная левая часть больше отрицательной правой. Если же $x \ge 1$, после возведения обеих частей неравенства (a) в квадрат мы приходим к равносильному неравенству (a) соотношению $2x+1 \ge (2x+1)^2(x-1)^2$, которое при рассматриваемых ограничениях $x \ge 1$ равносильно неравенству

$$1 \ge (2x+1)\left(x^2-2x+1\right) \Leftrightarrow 2x^3-3x^2 \le 0 \Leftrightarrow x^2(2x-3) \le 0 .$$

Так как при $x \ge 1$ первый сомножитель левой части последнего неравенства положителен, получаем $2x-3 \le 0$. Итак, второй случай дает решения $1 \le x \le 1{,}5$.

Ответ: $-0{,}5 \le x \le 1{,}5$.

Пример 7. *Решите неравенство* $\sqrt{5x-4} < x$.

Решение. Воспользуемся схемой (3). Согласно ей, наша задача сводится к решению двойного неравенства $0 \le 5x-4 < x^2$ при условии $x > 0$. Таким образом, надо решить систему

$$\begin{cases} x > 0, \\ 5x-4 \ge 0, \\ x^2-5x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \ge \dfrac{4}{5}, \\ x < 1;\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{4}{5}; 1\right) \cup (4; +\infty).$$

Ответ: $0{,}8 \le x < 1$; $x > 4$.

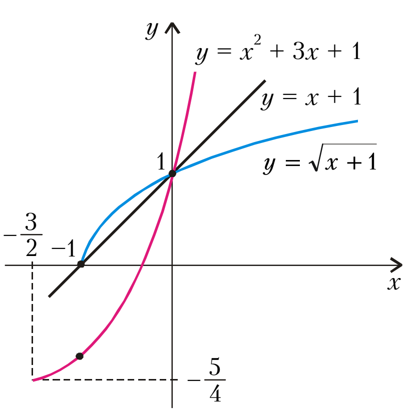
Пример 8. *Решите неравенство* $\sqrt{x+1} \le x^2+3x+1$.

Прямое применение схемы $(3')$ приводит (после возведения данного неравенства в квадрат) к необходимости найти корни многочлена четвертой степени, причем легко подобрать лишь один его корень, $x = 0$ (он получится из-за взаимного уничтожения свободных членов, равных 1, в обеих частях полученного неравенства), а корни оставшегося кубического многочлена найти очень непросто – они не рациональны.

Решение. Заметим, что график левой части данного неравенства это верхняя ветвь параболы, ось симметрии которой – ось абсцисс, а вершина – точка $(-1; 0)$; график правой части это парабола, ось которой параллельна оси ординат, а вершина – точка $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$.

Воспользуемся теперь тем, что график левой части имеет «выпуклость вверх» (т.е. лежит выше любой своей хорды – отрезка, соединяющего любые две точки графика), а правая часть – «выпуклость вниз».

Мы уже установили, что графики левой и правой частей имеют общую точку с абсциссой, равной нулю. Поэтому становится очевидным, что луч с началом в точке $(-1; 0)$, проходящий через точку $(0; 1)$, разделяет два случая: левее общей точки график левой части выше графика правой, а правее – наоборот (это хорошо видно на рисунке).



В задаче требуется найти, при каких значениях переменной график левой части ниже графика правой. Это легко находится из рисунка.

Ответ: $[0; +\infty)$.

Упражнения. Решите неравенства.

1. $x < \sqrt{2-x}$. **2.** $x+1 > \sqrt{2+x}$. **3.** $x + \frac{9}{8} > \sqrt{x+1}$.

4. $2x-3 < 2\sqrt{x^2-9}$. **5.** $\sqrt{x^2+3} \ge \sqrt{3-x-2x^2}$.

6. $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$. **7.** $\sqrt{4-4x^3+x^6} > x - \sqrt[3]{2}$.

8. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} > \dfrac{1}{2-x}$. **9.** $\sqrt{-x^2-4x} + x + 1 > 0$.

10. $\sqrt{-x^2+x+2} + 2x - 1 > 0$.

Более сложные неравенства

В этом разделе мы начнем решать более сложные задачи, стараясь свести их решение к стандартным ситуациям – к простейшим неравенствам, рассмотренным выше. Приемы сведения во многом аналогичны применяемым при решении иррациональных уравнений.

Если в неравенстве встречаются два квадратных радикала, обычно приходится возводить неравенство в квадрат дважды, конечно, обеспечивая при этом необходимые для проведения этой операции условия.

Пример 9. *Решите неравенство* $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} > 2$.

Первое решение. Перенесем второй радикал в правую часть, чтобы обе части неравенства стали неотрицательными и его можно было возвести в квадрат (не рассматривая при этом два случая):

$$\sqrt{2x+3} > \sqrt{x-2} + 2 \Leftrightarrow 2x+3 >$$

$$> x - 2 + 4\sqrt{x-2} + 4 \Leftrightarrow x+1 > 4\sqrt{x-2}. \quad (*)$$

Мы пришли к простейшему стандартному неравенству (см. схему (3) в первом разделе статьи):

$$(a) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le 16(x-2) < x^2+2x+1, \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x^2-14x+33 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2, \\ x < 3;\ x > 11 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le x < 3, \\ x > 11. \end{array}\right.$$

Замечание. При получении неравенства $(*)$ мы не выписывали допустимые значения неизвестного, но в этом не было необходимости, так как там фигурировал $\sqrt{x-2}$, который существует при $x \ge 2$, но при этих значениях x существует и $\sqrt{2x+3}$.

Второе решение. Сделаем замену переменной: $t = \sqrt{x-2} \ge 0$. Тогда $x = t^2+2$, и данное неравенство приводится к стандартному виду $\sqrt{2t^2+7} > t+2$. Решив это неравенство по схеме (2), получим $0 \le t < 1$, $t > 3$. Остается сделать обратную замену и найти x.

Ответ: $x \in [2; 3) \cup (11; +\infty)$.

Пример 10. *Решите неравенство* $\dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x+6} < 1$.

Решение. Заметим, что для избавления от радикала достаточно возвести данное неравенство в квадрат. Но для этого необходима неотрицательность обеих его частей, что выполняется лишь при условии $x + 6 > 0$ (ведь все остальные выражения, входящие в неравенство, неотрицательны). Но при этом условии можно умножить данное неравенство на положительное выражение $x + 6$.