а $c + d = 0$. В этом случае и $a + b = 0$, следовательно,

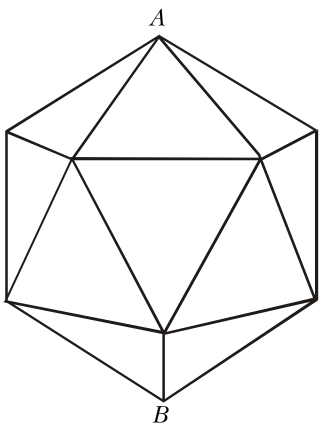
$$a\left(f(x) - f(y)\right) = f\left(c(x - y)\right).$$

Полагая $x = 2y$ и учитывая равенство $a = c^n$, получим отсюда: $2^n - 1 = 1$, т.е. $n = 1$. Полученное противоречие доказывает, что случай $n > 1$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ невозможен.

В.Сендеров

М1780*. *Каждая точка сферы окрашена в красный или синий цвет. Докажите, что найдутся три одноцветные точки, которые являются вершинами равностороннего треугольника.*

Впишем в сферу икосаэдр (см. рисунок). Каждая из 12 вершин икосаэдра является либо красной, либо синей.



Мы сможем доказать, что у икосаэдра найдутся три одноцветные вершины, которые являются в то же время вершинами равностороннего треугольника. Для начала запишем, что множество вершин икосаэдра предоставляет нам равносторонние треугольники двух типов. Первый тип: три вершины любой грани икосаэдра. Второй тип: у любой грани икосаэдра имеются три смежные грани, отметив у каждой из которых по одной внешней вершине, получаем равносторонний треугольник.

Из 12 вершин икосаэдра не менее 6 вершин будут одного цвета, например красного. Отметим две диаметрально противоположные вершины A и B такие, что вершина A – красного цвета. Возможны два случая.

Первый случай: вершина B тоже красная. Для краткости пятерку вершин, смежных с вершиной A, будем называть A-множеством, пятерку вершин, смежных с вершиной B – B-множеством. Если A-множество содержит три (или более) красные точки, то две из них – смежные вершины икосаэдра. Эти две точки вместе с вершиной A дают равносторонний треугольник первого типа с красными вершинами. Если B-множество содержит три (или более) красные точки, то две из них – смежные вершины икосаэдра. Эти две точки вместе с вершиной B дают равносторонний треугольник первого типа. Возможен последний вариант: A-множество и B-множество содержат по две красные точки и притом каждая из этих пар не является парой смежных вершин икосаэдра. Тогда две красные точки из B-множества вместе с вершиной A являются вершинами равностороннего треугольника, у которого все вершины красные.

Второй случай: вершина B синяя. Тогда либо A-множество, либо B-множество содержит три красные точки. Если это A-множество, то найдется равносторонний треугольник первого типа с красными вершинами (одна из них A). Если это B-множество, то найдется равносторонний треугольник второго типа с красными вершинами (одна из них A).

Мы доказали чуть больше, чем хотели. Именно: если 6 из 12 вершин икосаэдра красные, то найдется равносторонний треугольник с красными вершинами.

Для сферы будет справедливым такое дополнительное утверждение:

Каждая точка сферы окрашена в красный или синий цвет так, что всякие две диаметрально противоположные точки окрашены в разные цвета. Тогда для любой точки сферы найдется равносторонний треугольник с одноцветными вершинами, одной из которых является эта точка сферы.

В.Произволов

Ф1788. *Два тонких стержня помещены в воду так, что они параллельны и расстояние между ними равно a. По одному из стержней резко ударяют. Через какое время звук от удара дойдет до точки на втором стержне, удаленной от места удара на расстояние* $\sqrt{a^2 + l^2}$*, если скорости звука в воде и в стержне равны u и v соответственно?*

Обозначим точку удара по первому стержню через A, а точку, в которой принимают звуковой сигнал, – через B (рис.1). В зависимости от соотношения между параметрами, заданными в условии задачи, звук быстрее дойдет до точки B или при распространении по прямой AB, или при распространении сначала вдоль стержня, а затем по воде.

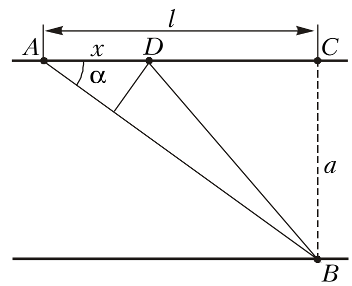


Рис.1

При $u > v$ звуковой сигнал, очевидно, быстрее дойдет до точки B по прямой AB. Время распространения сигнала в этом случае будет равно

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + l^2}}{u}.$$

Пусть теперь $u < v$. Рассмотрим два сигнала, одновременно вышедших из точки A, один из которых идет по прямой сразу в точку B, а другой сначала распространяется на малое расстояние x по стержню до точки D, а затем идет в точку B по воде (см. рис.1). Обозначим $\angle CAB$ через α. Разность $AB - DB$, в силу малости x, приближенно равна $x\cos\alpha$. Следовательно, разность времен распространения сигналов по путям AB и DB равна

$$\Delta t = \frac{AB}{u} - \left(\frac{x}{v} + \frac{DB}{u}\right) = \frac{x\cos\alpha}{u} - \frac{x}{v}.$$

При выполнении условия $\cos\alpha = l/\sqrt{a^2 + l^2} < u/v$ разность Δt отрицательна, и звук быстрее дойдет до точки B по прямой, затратив на это время t_1. При условии $\cos\alpha > u/v$ разность Δt положительна, т.е. звуковой сигнал быстрее дойдет до точки B по ломаной линии (распространяясь сначала вдоль стержня, а затем по воде). Пусть в последнем случае звук

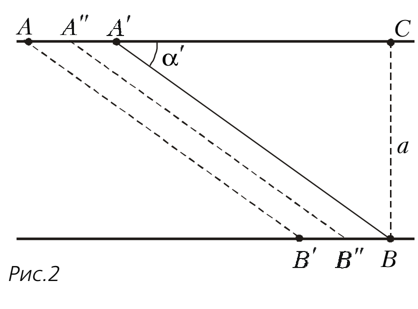


Рис.2