водами «треугольники» одинаковы). Первый из вольтметров показывает 6,02 В, второй показывает 5,97 В. Считая показания приборов точными, найдите показания следующих двух вольтметров. Во сколько раз изменится ток, потребляемый всей цепью от батарейки, если второй, четвертый, шестой, и т.д. вольтметры отключить?

А.Зильберман

Ф1807. Проводящий шар заряжают некоторым зарядом Q и при помощи длинной и очень тонкой проволочки соединяют с незаряженным проводящим шаром втрое меньшего радиуса, расположенным очень далеко. Максимальное значение силы тока оказывается при этом равным I_0. Каким будет это значение в другом опыте – когда вначале каждый из зарядов первого и второго шара равен Q? Сопротивление проволочки мало.

А.Шаров

Решения задач М1771—М1780, Ф1788—Ф1792

М1771. *В результате деления числа* $\underbrace{111\ldots1}_{3^n\text{ единиц}}$ *(n – натуральное) на 3^n получили число M. Докажите, что число M целое и его можно разложить на n различных множителей.*

Имеют место равенства:

$$3^n M = \underbrace{111\ldots11}_{3^n\text{ едениц}} = 111\times 1001001\times 1\underbrace{00\ldots0}_{8\text{ нулей}}1\underbrace{00\ldots0}_{8\text{ нулей}}1\times\ldots$$

$$\ldots\times 1\underbrace{000\ldots00}_{3^{n-1}-1\text{ нулей}}1\underbrace{000\ldots00}_{3^{n-1}-1\text{ нулей}}1.$$

В справедливости последнего равенства можно убедиться, последовательно перемножив сомножители слева направо. Поскольку сомножители различны, их ровно n и каждый из них делится на 3, то после деления равенств на 3^n получаем искомое разложение числа M на n различных множителей.

Д.Мамедьяров, А.Жуков

М1772. *Каждое число последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}$ равно 2, 5 или 9. При этом $a_1 = a_{2n+1}$, но любые два соседних числа различны. Докажите равенство*

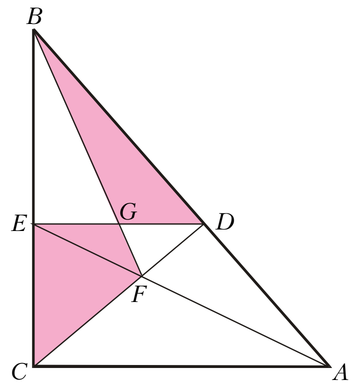
$$a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_4 - \ldots + a_{2n-1}a_{2n} - a_{2n}a_{2n+1} = 0.$$

Члены конечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$, a_{2n+1} принимают не более трех различных значений. Так как соседние члены обязательно различны, то слагаемые искомой алгебраической суммы тоже принимают (с точностью до знака) не более трех различных значений. Достаточно показать, что каждое значение со знаком «плюс» принимается столько же раз, сколько и со знаком «минус».

В наборе пар (a_1, a_2), (a_3, a_4), … , (a_{2n-1}, a_{2n}), как и в наборе (a_2, a_3), (a_4, a_5), … , (a_{2n}, a_{2n+1}), число 2 встречается в k парах, число 5 – в l парах, а число 9 – в m парах, притом $k + l + m = 2n$. Значит, пар без числа 2 и в том и в другом наборе будет $\frac{-k+l+m}{2}$, без числа $5 - \frac{k-m+l}{2}$, а без числа $9 - \frac{k+l-m}{2}$. Откуда следует, что искомая алгебраическая сумма будет равна нулю.

Внимательный читатель отметит, что числа 2, 5 и 9 в условии задачи можно заменить любой тройкой различных чисел.

В.Произволов



М1773. *Высота CD и биссектриса AE прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) пересекаются в точке F (см. рисунок). Пусть G – точка пересечения прямых ED и BF. Докажите, что площади четырехугольника $CEGF$ и треугольника BDG равны.*

Так как AE – биссектриса ΔABC, а AF – биссектриса ΔADC,

$$\frac{EC}{BE} = \frac{AC}{AB} = \cos\angle BAC = \frac{DA}{AC} = \frac{DF}{FC},$$

$$EC \cdot FC = BE \cdot DF = (BC - EC)\cdot(CD - CF),$$

$$BC \cdot AC = BC \cdot CF + EC \cdot CD.$$

Умножив обе части последнего равенства на $1/2\sin\angle BCD$, получим, что

$$S_{BCD} = S_{BCF} + S_{ECD}.$$

Но

$$S_{BCD} = S_{CEGF} + S_{BEG} + S_{BGD} + S_{DFG},$$

$$S_{BCF} = S_{GECF} + S_{BEG},\ S_{ECD} = S_{GECF} + S_{DFG},$$

откуда и следует требуемое равенство.

И.Жук

М1774. *Король сказочной страны пригласил на пир людоедов своей страны. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. (Если людоед A хочет съесть людоеда B, то это не значит, что людоед B хочет съесть людоеда A.) Известно, что наибольшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй – третьего и т.д., состоит из шести людоедов. Докажите, что король может так рассадить людоедов по шести комнатам, что в каждой комнате никто не хочет никого съесть.*

Обозначим людоедов точками. Соединим точки a и b, соответствующие людоедам A и B, линией со стрелкой от a к b, если людоед A хочет съесть людоеда B. Удалим из схемы минимальное число линий, так чтобы в оставшейся схеме не оказалось циклов, т.е. путей вида $(a, b, \ldots, a)$. Для любой точки v определим ее метку $t(v)$ как число точек в наибольшем пути с началом в точке v на получившейся схеме (рис.1).

Из условия задачи следует, что максимальное значение $t(v)$ равно 6.