плоскостях (рис.11). Развертка такого тетраэдра – это прямоугольник, стороны которого разбиваются на меньшие отрезки-ребра развертки и попарно отождествляются. Данная развертка удовлетворяет обоим условиям теоремы Александрова. Это можно даже не проверять, так как мы имеем дело с разверткой выпуклого многогранника.

Упражнение 3. При каком соотношении сторон в прямоугольнике из развертки, указанной на рисунке 11, получается правильный тетраэдр?

Теперь предположим, что автомат, изготавливающий

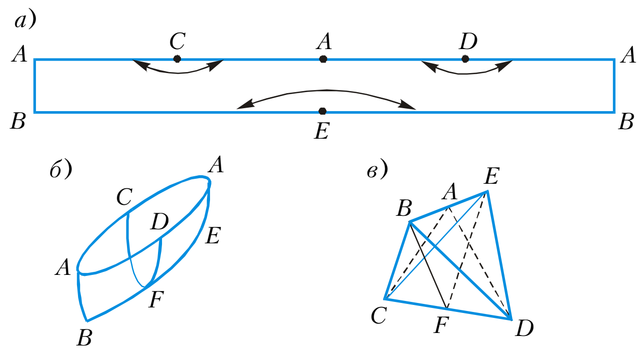

Рис.12

пакеты, «зачастил». Конкретнее, предположим теперь, что прямоугольник развертки очень «низкий», а правила склеивания остаются теми же (рис.12,*а*). Эта развертка, так же как и «высокий» прямоугольник, удовлетворяет условиям (1) и (2). По теореме Александрова, из развертки можно склеить выпуклый многогранник. С другой стороны, если нижний край цилиндра уже склеен, то для склеивания в перпендикулярном направлении не хватает высоты (рис.12,*б*). Кажется почти очевидным, что эта развертка является контрпримером к теореме Александрова. Тем не менее, и из этой развертки тоже можно склеить тетраэдр (рис.12,*в*).

Еще один контрпример. Возьмем правильный треугольник, поделим его стороны пополам и отождествим одну половинку каждой стороны с другой ее половинкой (рис.13,*а*). Из такой развертки склеивается правильный тетраэдр (рис.13,*б*).

Разрежем треугольник по прямой AD на два треугольника, которые склеим по общей стороне в новую развертку $ACABAD$ (рис.13,*в*). И опять возникает сомнение в том, можно ли склеить из нее многогранник. Развертка на рисунке 13,*в* удовлетворяет условиям теоремы Александрова. Поэтому из нее можно склеить выпуклый многогранник. Более того, эта развертка изометрична развертке 13,*а*, и, по теореме Коши–Александрова, этот многогранник будет тем же самым правильным тетраэдром. На рисунке 13,*г* представлена еще одна развертка, изометричная предыдущим. Возможность склеить из этой «тупоугольнотреугольной» развертки тетраэдр кажется еще более сомнительной.

Тем не менее, по теореме Александрова это можно сделать. У рассматриваемой развертки имеется ровно четыре вершины (точки, в которых сумма подходящих

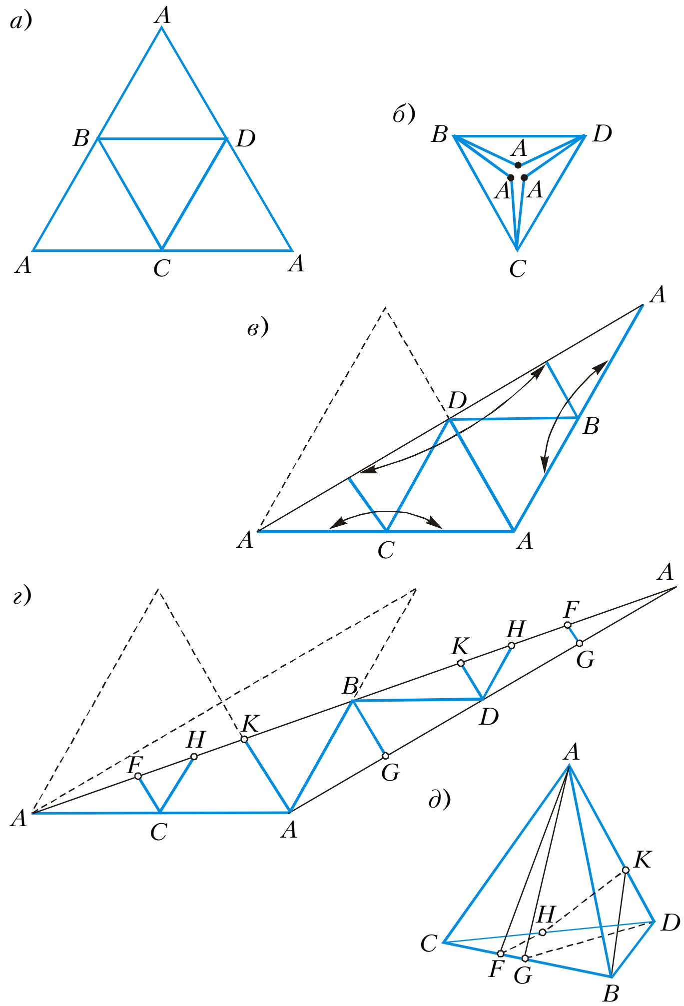

Рис.13

углов строго меньше 2π). Значит, многогранник – это тетраэдр, который может, вообще говоря, вырождаться в четырехугольник. Чтобы получить на развертке ребра будущего тетраэдра, нужно вершины попарно соединить кратчайшими линиями. Это будут ребра тетраэдра. Когда развертка «хорошая» (см. рис.13,*а*), кратчайшие состоят из целых отрезков и хорошо угадывается будущий многогранник. Но, вообще говоря, кратчайшая на развертке состоит из нескольких отрезков (см. рис.13,*б–г*) и из-за этого трудно определить, как устроены грани тетраэдра.

Задача определения многогранника по развертке, если она имеет более четырех настоящих вершин (в которых сумма подходящих углов меньше 2π), является очень трудной. По теореме Александрова о развертке мы знаем, что выпуклый многогранник существует. По теореме Коши–Александрова о единственности мы знаем, что он единственный. Возникает вопрос: каков он? Легко определить на развертке вершины многогранника. Каждому ребру на многограннике соответствует кратчайшая, соединяющая какие-то вершины. Но не все кратчайшие, соединяющие вершины, являются ребрами. Определить на развертке, какие из кратчайших являются ребрами, и, следовательно, определить все грани многогранника, – очень трудная, пока нерешенная задача.