XXVII Всероссийская олимпиада школьников по математике

Как обычно, в дни школьных весенних каникул прошел зональный этап Всероссийской математической олимпиады. В олимпиаде, проходившей в Иванове, Курске, Омске и Челябинске, участвовали более 400 школьников – победителей областных (краевых, республиканских) олимпиад. А с 19 по 26 апреля в Твери был проведен заключительный этап олимпиады, в котором приняли участие 198 победителей зонального этапа и 6 школьников из Болгарии.

Варианты заданий оказались достаточно сложными, и, хотя каждую задачу решили, как минимум, семеро, только три участника сумели решить все восемь задач. Это десятиклассники Егор Куликов и Юрий Кудряшов, а также выступавший по 11 классу двукратный победитель Международных математических олимпиад Владимир Барзов из Болгарии.

Отметим высокие творческие достижения участников олимпиады: было предложено множество оригинальных решений, некоторые из которых не были известны членам жюри.

По результатам олимпиады жюри определило состав команды России на 42 Международную математическую олимпиаду. В нее вошли Сергей Спиридонов (Ижевск), Алексей Глазырин (Челябинск), Михаил Гарбер (Ярославль), Андрей Халявин (Киров), Сергей Соколов (Рыбинск) и Андрей Воробьев (Санкт-Петербург).

Ниже приводятся условия задач зонального и заключительного этапов и список призеров олимпиады.

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

Зональный этап

8 класс

1. Можно ли числа 1, 2, ..., 10 расставить в ряд в некотором порядке так, чтобы каждое из них, начиная со второго, отличалось от предыдущего на целое число процентов?

Р.Женодаров

2. N цифр – единицы и двойки – расположены по кругу. *Изображенным* назовем число, образованное несколькими цифрами, расположенными подряд (по часовой стрелке или против часовой стрелки). При каком наименьшем значении N среди изображенных могут оказаться все четырехзначные числа, запись которых состоит только из цифр 1 и 2 (в том числе 1111 и 2222)?

С.Волчёнков

3. Все стороны выпуклого пятиугольника равны, а все углы различны. Докажите, что максимальный и минимальный углы этого пятиугольника прилегают к одной его стороне.

Д.Джукич

4. Уголком размера $n \times m$, где $m, n \ge 2$, называется фигура, получаемая из прямоугольника размера $n \times m$ клеток удалением прямоугольника размера $(n-1)\times(m-1)$ клеток.

Два игрока по очереди делают ходы, заключающиеся в закрашивании в уголке произвольного ненулевого количества клеток, образующих прямоугольник или квадрат. Пропускать ход или красить одну клетку дважды нельзя. Проигрывает тот, после чьего хода все клетки уголка окажутся окрашенными. Кто из игроков победит при правильной игре?

Д.Храмцов

5. Пусть a, b, c, d, e и f – некоторые числа, причем $ace \ne 0$. Известно, что $|ax+b|+|cx+d|=|ex+f|$ при всех значениях x. Докажите, что $ad = bc$.

Р.Женодаров

6. Натуральное число n назовем *хорошим*, если каждое из чисел n, $n+1$, $n+2$ и $n+3$ делится на сумму своих цифр. (Например, $n = 60398$ – хорошее.) Обязательно ли предпоследней цифрой хорошего числа, оканчивающегося восьмеркой, будет девятка?

В.Замков

7. Можно ли клетки доски 5×5 покрасить в 4 цвета так, чтобы клетки, стоящие на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов, были покрашены не менее чем в 3 цвета?

О.Подлипский

8. Докажите, что любой треугольник можно разрезать не более чем на 3 части, из которых складывается равнобедренный треугольник.

Л.Емельянов

9 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. Петя и Коля играют в следующую игру: они по очереди изменяют (увеличивают или уменьшают) один из коэффициентов a или b квадратного трехчлена $f = x^2 + ax + b$: Петя на 1, Коля – на 1 или на 3. Коля выигрывает, если после хода одного из игроков получается трехчлен, имеющий целый корень. Верно ли, что Коля может выиграть при любых начальных целых коэффициентах a и b независимо от игры Пети?

Н.Агаханов

3. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = NC$, Q – точка пересечения отрезков AN и CM. Докажите, что DQ – биссектриса угла D.

Л.Емельянов

4. Мишень представляет собой треугольник, разбитый тремя семействами параллельных прямых на 100 равных правильных треугольничков с единичными сторонами. Снайпер стреляет по мишени. Он целится в треугольничек и попадает либо в него, либо в один из соседних с ним по стороне. Он видит результаты своей стрельбы и может выбирать, когда стрельбу заканчивать. Какое наибольшее число треугольничков он может с гарантией поразить ровно по пять раз?

Ю.Лифшиц

5. Внутри выпуклого пятиугольника выбраны две точки. Докажите, что можно выбрать четырехугольник с вершинами в вершинах пятиугольника так, что внутрь него попадут обе выбранные точки.

В.Дольников

6. Существует ли такое натуральное число, что произведение всех его натуральных делителей (включая 1 и само число) оканчивается ровно на 2001 ноль?

А.Храбров

7. Окружность, вписанная в угол с вершиной O, касается его сторон в точках A и B, K – произвольная точка на меньшей из двух дуг AB этой окружности. На прямой OB взята точка L такая, что прямые OA и KL параллельны. Пусть M – точка пересечения окружности ω, описанной около треугольника KLB, с прямой AK, отличная от K. Докажите, что прямая OM касается окружности ω.

С.Берлов, П.Кожевников

8. Саша написал на доске ненулевую цифру и приписывает к ней справа по одной ненулевой цифре, пока не выпишет миллион цифр. Докажите, что на доске не более 100 раз был написан точный квадрат.

А.Голованов

10 класс

1. Длины сторон многоугольника равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что $f(a_1) = f(a_2 + \ldots + a_n)$. Докажите, что верны все равенства вида $f(A) = f(B)$, где A – сумма длин любых нескольких сторон многоугольника, B – сумма длин остальных его сторон.

Н.Агаханов

2. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC отмечена точка K. Окружность s_1 проходит через точку K и касается прямых AB и AD, причем вторая точка пересечения s_1 с диагональю AC лежит на отрезке AK. Окружность s_2 проходит через точку K и касается прямых CB и CD, причем вторая точка пересечения s_2 с диагональю AC лежит на отрезке KC. Докажите, что при всех положениях точки K на диагонали AC прямые, соединяющие центры окружностей s_1 и s_2, будут параллельны между собой.

Т.Емельянова

3. Опишите все способы покрасить каждое натуральное число в один из трех цветов так, что если числа a, b и c (не обязательно различные) удовлетворяют условию $2000(a+b) = c$, то все они либо одного цвета, либо трех разных цветов.

Ю.Лифшиц

4. Проведены три семейства параллельных прямых, по 10 прямых в каждом. Какое наибольшее число треугольников они могут вырезать из плоскости?

Ю.Лифшиц

5. a, b и c – целые числа, $c \neq b$. Известно, что квадратные трехчлены $ax^2 + bx + c$ и $(c-b)x^2 + (c-a)x + (a+b)$ имеют общий корень (не обязательно целый). Докажите, что $a + b + 2c$ делится на 3.

А.Храбров

6. Дан треугольник ABC. На прямой AC отмечена точка B_1 так, что $AB = AB_1$, при этом B_1 и C находятся по одну сторону от A. Через точки C, B_1 и основание биссектрисы угла A треугольника ABC проводится окружность ω, вторично пересекающая окружность, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что касательная, проведенная к ω в точке Q, параллельна AC.

Л.Емельянов

7. Множество клеток на клетчатой плоскости назовем *ладейно связанным*, если из любой его клетки можно попасть в любую другую, двигаясь по клеткам этого множества ходом ладьи (ладье разрешается перелетать через поля, не принадлежащие нашему множеству). Докажите, что ладейно связанное множество из 100 клеток можно разбить на пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце.

И.Певзнер

8. На окружности расположена тысяча непересекающихся интервалов, и в каждом из них написаны два натуральных числа. Сумма чисел каждого интервала делится на произведение чисел интервала, соседнего слева. Каково наибольшее возможное значение наибольшего из написанных чисел?

В.Сендеров

11 класс

1. Найдите все простые числа p и q такие, что $p + q = (p-q)^3$.

Р.Женодаров

2. Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет ровно три различных корня, а уравнение $f(f(f(x))) = 0$ – ровно семь различных корней?

Н.Агаханов, О.Подлипский

3. Пусть AD – биссектриса треугольника ABC и прямая l касается окружностей, описанных около треугольников ADB и ADC в точках M и N соответственно. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков BD, DC и MN, касается прямой l.

Н.Седракян

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Дана последовательность $\{x_k\}$ такая, что $x_1 = 1$, $x_{n+1} = n \sin x_n + 1$. Докажите, что последовательность непериодична. (Последовательность называется периодической, если она имеет период, начиная с некоторого, не обязательно первого номера.)

А.Голованов

6. Докажите, что если у тетраэдра два отрезка, идущие из вершин некоторого ребра в центры вписанных окружностей противолежащих граней, пересекаются, то отрезки, выпущенные из вершин скрещивающегося с ним ребра в центры вписанных окружностей двух других граней, также пересекаются.

Фольклор

7. На плоскости дано бесконечное множество точек S, при этом в любом квадрате 1×1 лежит конечное число точек из множества S. Докажите, что найдутся две разные точки A и B из S такие, что для любой другой точки X из S

$$|XA|, |XB| \geq 0{,}999|AB|.$$

Р.Карасёв

8. Докажите, что в любом множестве, состоящем из 117 попарно различных трехзначных чисел, можно выбрать 4 попарно непересекающихся подмножества, суммы чисел в которых равны.

Д.Храмцов, Г.Челноков

Заключительный этап

9 класс

1. Числа от 1 до 999999 разбиты на две группы: в первую отнесено каждое число, для которого ближайшим к нему квадратом является квадрат нечетного числа, во вторую – числа, для которых ближайшими являются квадраты четных чисел. В какой из групп сумма чисел больше?

Н.Агаханов

2. Два многочлена $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ и $Q(x) = x^2 + px + q$ принимают отрицательные значения на некотором интервале I длины более 2, а вне I – неотрицательны. Докажите, что найдется такая точка x_0, что $P(x_0) < Q(x_0)$.

Н.Агаханов

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка K таким образом, что середина отрезка AD равноудалена от точек K и C, а середина отрезка CD равноудалена от точек K и A. Точка N – середина отрезка BK. Докажите, что углы NAK и NCK равны.

С.Берлов

4. Дан 2000-угольник, никакие три диагонали которого не пересекаются в одной точке. Каждая из его диагоналей покрашена в один из 999 цветов. Докажите, что существует треугольник, все стороны которого целиком лежат на диагоналях одного цвета. (Вершины треугольника не обязательно должны оказаться вершинами исходного многоугольника.)

Ю.Лифшиц

5. Юра выложил в ряд 2001 монету достоинством 1, 2 и 3 копейки. Оказалось, что между любыми двумя копеечными монетами лежит хотя бы одна монета, между любыми двумя двухкопеечными монетами лежат хотя бы две монеты, а между любыми двумя трехкопеечными монетами лежат хотя бы три монеты. Сколько у Юры могло быть трехкопеечных монет?

Ю.Лифшиц

6. См. задачу М1792 «Задачника «Кванта».

7. На большей стороне AC треугольника ABC взята точка N так, что серединные перпендикуляры к отрезкам AN и NC пересекают стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Докажите, что центр O описанной около треугольника ABC окружности лежит на окружности, описанной около треугольника KBM.

С.Берлов

8. Найдите все нечетные натуральные n $(n > 1)$ такие, что для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a + b - 1$ также является делителем n.

Д.Джукич

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса

2. См. задачу М1794 «Задачника «Кванта».

3. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Касательная к внутренней окружности, проведенная в точке K, пересекает внешнюю окружность в точках A и B. Пусть M – середина дуги AB, не содержащей точку N. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника BMK, не зависит от выбора точки K на внутренней окружности.

Т.Емельянова

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем между любыми двумя городами существует единственный не самопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из любого города попасть в любой другой.

Д.Карпов

5. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2001$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2001) > \frac{1}{64}$.

Д.Терёшин

6. См. задачу М1793 «Задачника «Кванта».

7. На высотах (но не на продолжениях высот) остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1, отличные от точки пересечения высот H и такие, что сумма площадей треугольников ABC_1, BCA_1, CAB_1 равна площади треугольника ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через *точку* H.

С.Берлов

8. Найдите все натуральные числа n такие, что для любых двух его взаимно простых делителей a и b число $a + b - 1$ также является делителем n.

Д.Джукич

11 класс

1. Пусть $2S$ – суммарный вес некоторого набора гирек. Назовем натуральное число k *средним*, если в наборе можно выбрать k гирек, суммарный вес которых равен S. Какое наибольшее количество средних чисел может иметь набор из 100 гирек?

Д.Кузнецов

2. См. задачу 3 для 10 класса.

3. На плоскости даны два таких конечных набора выпуклых многоугольников P_1 и P_2, что любые два многоугольника из разных наборов имеют общую точку, и в каждом из двух наборов P_1 и P_2 есть пара непересекающихся многоугольников. Докажите, что существует прямая, пересекающая все многоугольники обоих наборов.

В.Дольников

4. Участникам тестовой олимпиады было предложено n вопросов. Жюри определяет сложность каждого из вопросов: целое количество баллов, получаемых участниками за правильный ответ на вопрос. За неправильный ответ начисляется 0 баллов, все набранные участниками баллы суммируются. Когда все участники сдали листки со своими ответами, оказалось, что жюри так может определять сложность вопросов, чтобы места между участниками распределялись любым наперед заданным образом.

При каком наименьшем числе участников это могло быть?

С.Токарев

5. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают отрицательные значения на непересекающихся интервалах, причем концы этих интервалов – различные точки. Докажите, что найдутся такие положительные числа α и β, что для любого действительного x будет выполняться неравенство

$$\alpha f(x) + \beta g(x) > 0.$$

С.Берлов, О.Подлипский

6. a и b – различные натуральные числа такие, что $ab(a+b)$ делится на $a^2 + ab + b^2$. Докажите, что $|a - b| > \sqrt[3]{ab}$.

С.Берлов

7. В стране 2001 город, некоторые пары городов соединены дорогами, причем из каждого города выходит хотя бы одна дорога и нет города, соединенного дорогами со всеми остальными. Назовем множество городов D *доминирующим*, если любой не входящий в D город соединен дорогой с одним из городов множества D. Известно, что в любом доминирующем множестве хотя бы k городов. Докажите, что страну можно разбить на $2001 - k$ республик так, что никакие два города из одной республики не будут соединены дорогой.

В.Дольников

8. Сфера с центром в плоскости основания ABC тетраэдра $SABC$ проходит через вершины A, B и C и вторично пересекает ребра SA, SB и SC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке O. Докажите, что O – центр сферы, описанной около тетраэдра $SA_1B_1C_1$.

Л.Емельянов

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Волков Юрий – Кемерово, Классический лицей,
Смирнов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Дубашинский Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 10 классам –

Куликов Егор – Ярославль, школа 33,
Рахнев Добромир – Болгария, Пловдив, Пловдивская математическая школа,
Каленков Максим – Набережные Челны, гимназия 26,
Кудряшов Юрий – Москва, СУНЦ МГУ,
Сухов Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 11 классам –

Барзов Владимир – Болгария, София, Софийская математическая гимназия,
Спиридонов Сергей – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей 41,
Глазырин Алексей – Челябинск, лицей 11,
Гарбер Михаил – Ярославль, школа 33,
Гусев Глеб – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Румянцев Андрей – Москва, СУНЦ МГУ.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Бугаев Дмитрий – Омск, лицей 64,
Ширяев Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Костин Михаил – Челябинск, ФМЛ 31,
Гравин Николай – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Томин Дмитрий – Иваново, лицей 33;

по 10 классам –

Ватев Кирилл – Долгопрудный, ФМШ 5,
Бадзян Андрей – Челябинск, ФМЛ 31,
Кобзев Владимир – Белорецк, Компьютерная школа,
Левин Михаил – Ростов-на-Дону, гимназия 36,
Пономарева Надежда – Екатеринбург, гимназия 9,
Жеребцов Николай – Калуга, школа 46;

по 11 классам –

Воробьев Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Соколов Сергей – Рыбинск, школа 30,
Халявин Андрей – Киров, ФМЛ,
Гарбер Алексей – Ярославль, школа 33,
Столбов Василий – Кирово-Чепецк, гимназия,
Акопян Арсений – Москва, лицей «Вторая школа»,
Динев Славомир – Болгария, Варна, математическая гимназия,
Бурков Евгений – Нижний Новгород, гимназия 63,
Ицыксон Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Куюмжиян Каринэ – Ростов-на-Дону, школа 8,
Костин Андрей – Челябинск, ФМЛ 31,
Вершинина Анастасия – Киров, ФМЛ,
Родионов Павел – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Горин Вадим – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Гайфуллин Сергей – Раменское, муниципальная гимназия,
Никитин Сергей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Лазеев Владимир – Тамбов, МПЛ,
Ломоносов Роман – Краснодар, школа 89,
Старолетов Алексей – Барнаул, гимназия 42,
Вальтман Виталий – Санкт-Петербург, АГ СПБГУ,
Молчанов Евгений – Краснодар, школа 64,
Солодуха Иван – Санкт-Петербург, АГ СПБГУ,
Петухова Надежда – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Миргасимов Алмаз – Набережные Челны, гимназия 26,
Васильев Сергей – Екатеринбург, школа 68,
Семушин Иван – Киров, ФМЛ,
Панов Михаил – Рыбинск, школа 28,
Антипов Дмитрий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Баутин Григорий – Нижний Новгород, ФМЛ 40;

по 10 классам –

Стожков Владимир – Рыбинск, лицей 2,
Жданов Роман – Краснодар, лицей КГТУ,
Корсаков Артем – Челябинск, ФМЛ 31,
Хозин Михаил – Нижний Новгород, ФМЛ 40,
Близнашки Никифор – Болгария, София, Софийская математическая гимназия,
Новицкий Антон – Долгопрудный, ФМШ 5,
Сороцкий Евгений – Санкт-Петербург, гимназия 70,
Деркач Мария – Калуга, гимназия 24,
Данилов Александр – Ижевск, Экономико-математический лицей,
Захарова Виктория – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Телятник Андрей – Долгопрудный, ФМШ 5,
Позовной Олег – Москва, лицей «Вторая школа»,
Порсев Анатолий – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей 41;

по 11 классам –

Рочев Игорь – Ухта, Технический лицей,
Андреев Николай – Болгария, София, Софийская математическая гимназия,
Посов Илья – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Смирнов Филипп – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Медвинский Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 366,
Стырт Олег – Омск, лицей 64,
Трофимов Вадим – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Межиров Илья – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Целков Цено – Болгария, София, Софийская математическая гимназия.

Публикацию подготовили
Н.Агаханов, Д.Терешин