а на втором $m + 1$, в сумме $2m + 1 = k + 1$. Это равенство будет справедливо и для полоски 1×20, поскольку мы считаем, что она дважды задевает пару прямоугольников 1×2. Подсчитаем общее количество задеваний:

$$2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 21 = 230.$$

Следовательно, для одного из двух разбиений общее количество задеваний полосок будет не более чем 115. Дальше будем рассматривать только это разбиение на обобщенные квадраты. Как уже отмечалось, количество доминошек, которое можно будет вырезать, не меньше, чем удвоенное количество обобщенных квадратов минус общее число задеваний квадратов этого разбиения, т.е. $200 - 115 = 85$.

Приведем пример, который показывает, что вырезать 86 домино, вообще говоря, не удастся. Вырежем полоски из верхней части квадрата 20×20 так, как показано на рисунке 17 (невырезанные клетки закрашены). При таком положении

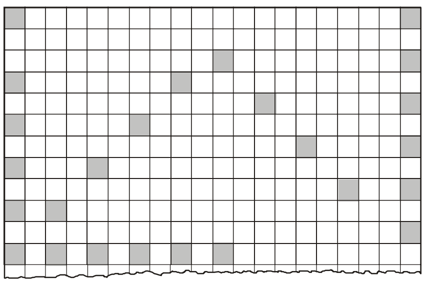

Рис. 17

полосок из верхней части нельзя больше вырезать ни одной доминошки. В нижней части квадрата остается 171 незанятых клеток. Поэтому 86 доминошек разместить в ней не удастся.

20. Выигрывает первый игрок.

Разобьем все натуральные числа, большие 1, на два множества L и W: число n отнесем к множеству L, если оно имеет вид $2^{2k+1}m+1$, где m нечетно, и к множеству W в противном случае, т.е. если оно имеет вид $2^{2k}m+1$ (число m снова нечетное). Все четные числа будут принадлежать W.

Покажем, что если на доске написано число из множества W, то его всегда можно превратить в число из множества L. А если на доске оказалось число из множества L, то любой ход переводит его в число из множества W.

Тогда, поскольку вначале на доске выписано число из множества W, первый игрок имеет выигрышную стратегию: каждым ходом он должен превращать число из множества W в число из L. Второй игрок ответным ходом вновь выпишет на доску число из W. Поэтому эта стратегия корректно определена, и числа из множества W будут встречаться только у первого игрока. Так как числа уменьшаются, когда-нибудь ему попадется число 2, и он выпишет на доску единицу.

Пусть на доске написано число $n \in W$, т. е. число вида $2^{2k}m+1$. Если k положительно, то число $\left[\frac{n+1}{2}\right] = 2^{2k-1}m+1$ принадлежит L, а если k равно нулю, то $n = m + 1 = (2l + 1) + 1 = 2l + 2$. Следовательно, из n можно получить числа $n - 1 = 2l + 1$ и $\left[\frac{n+1}{2}\right] = l+1$. Одно из этих чисел (если $l \neq 0$), очевидно, принадлежит множеству L. Если же l равно нулю, то оба эти числа равны 1 и игра закончилась.

Если на доске оказалось $n \in L$, т. е. число вида $2^{2k+1}m+1$, то из него можно получить либо число $n-1 = 2^{2k+1}m$, которое лежит в W, поскольку является четным, либо число $\left[\frac{n+1}{2}\right] = 2^{2k}m+1$, тоже принадлежащее множеству W.

21. Докажем утверждение задачи индукцией по n. База $n = 1$ очевидна.

Посетителя, сыгравшего наибольшее количество партий, назовем Гариком. Если Гарик сыграл не больше $(n + 1)/2$ партий, то и все остальные сыграли не более $(n + 1)/2$ партий каждый, и общее количество партий не превосходит $n(n + 1)/2$. Пусть Гарик сыграл хотя бы $(n + 1)/2$ партий. Будем называть партию, в которой не играл Гарик, *интригующей*. Поскольку Гарик сыграл не более n партий (по условию), то достаточно проверить, что интригующих партий не более $n(n - 1)/2$. Это сразу следует из индукционного предположения, если только мы проверим, что множество посетителей без Гарика удовлетворяет условию задачи.

Итак, докажем, что каждый посетитель сыграл не более $n - 1$ интригующих партий и каждые два не игравших друг с другом посетителя сыграли не более $n - 1$ интригующих партий на двоих. Для посетителей, игравших с Гариком (или пар не игравших друг с другом посетителей, один из которых играл с Гариком), это непосредственно вытекает из условия: этот посетитель (соответственно, пара) сыграл(а) всего не больше n партий, стало быть, интригующих – не более $n - 1$. Каждый же из не игравших с Гариком посетителей сыграл не более $(n-1)/2$ партий (поскольку вместе с Гариком они сыграли не больше n), так что для них и пар, составленных из них, утверждение также верно.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, Е.А.Силина, В.М.Хлебникова, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Подписано в печать . Тираж экз.

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати

142300 г. Чехов Московской области

Заказ №