Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

1. *Указание.* Кроме упомянутых мерседесов есть еще $100-(30+20+20)=30$ машин, которые отделяют друг от друга мерседесы упомянутых цветов; не более чем 30 немерседесов делят мерседесы на не более чем 31 группу подряд стоящих мерседесов. В одной из групп должно быть не менее трех мерседесов, и по условию они должны быть одного цвета.

2. Пусть мы воспользовались несколько раз первым обменом и теперь хотим вернуть свое добро при помощи второго и третьего обменов. Пусть мы совершили k раз второй обмен, n раз – третий обмен. Тогда мы сбыли $3k+n$ кусков мыла и приобрели $k+4n$ шил, причем $3k+n=k+4n$, откуда $2k=3n$, следовательно, $k=3t$, $n=2t$ при некотором t. Проведя эти $5t$ обменов, мы превратили $11t$ кусков мыла в такое же количество шил, т. е. мы скомпенсировали потери от $11t$ обменов первого типа. Итого мы совершили $16t$ обменов.

3. Федины шаги короче.

4. Нет, нельзя. Сторону длины 103 будем считать вертикальной. Каждый прямоугольник 9×14 разобьем на два прямоугольника 7×9. Число 103 представимо в виде суммы числа, делящегося на 7, и числа, делящегося на 9, единственным способом: $103=49+54$. Число 49 аналогично представить нельзя. Заметим, что любая горизонталь (лучше – не идущая по сторонам клеток) имеет длину 49 и рассечена на отрезки – пересечения с прямоугольниками разбиения. В силу сделанного замечания, ни один из этих отрезков не может иметь длину 9, значит, все стороны длины 9 у прямоугольников разбиения ориентированы вертикально. Следовательно, если вертикальная сторона прямоугольника разбиения равна 7, то горизонтальная–обязательно 14. Рассмотрим теперь произвольную вертикаль. Она разбита на отрезки длины 7, 9 и 14. Поскольку отрезки длины 7 и 14 имеют суммарную длину 49, то отрезков длины 7 – нечетное число. Отметим все прямоугольники 7×14, у которых вертикальная сторона равна 7. Отмеченное множество прямоугольников обладает следующим противоречивым свойством: сумма горизонтальных проекций этих прямоугольников – по очевидным причинам число четное, но при этом, в силу того, что каждая вертикаль пересекает нечетное число таких прямоугольников, сумма длин их проекций должна иметь ту же четность, что и горизонтальная сторона большого прямоугольника, т.е. 49 – число нечетное!

5. 2.*Указание.* Разобьем числа на 6 групп: в первую группу возьмем число a_1, а в остальные пять $-\left(a_2,a_3,a_4\right)$, $\left(a_5,a_6,a_7\right)$, …, $\left(a_{14},a_{15},a_{16}\right)$; получим оценку суммы всех чисел $S\ge a_1+10$.

Затем разобьем числа на 4 группы: первая группа – число a_2, остальные – $\left(a_3,a_4,a_5,a_6,a_7\right)$, $\left(a_8,a_9,a_{10},a_{11},a_{12}\right)$, $\left(a_{13},a_{14},a_{15},a_{16},a_1\right)$. Оценив сумму всех чисел, получим $S\le a_2+12$.

Из этих двух неравенств находим, что $a_1-a_2\le2$.

В том, что разность a_1-a_2 действительно может принимать значение 2, убедитесь самостоятельно.

6. Рассмотрим первые три фонаря, потом следующие три фонаря и т. д. В каждой такой тройке фонарей вначале был хотя бы один разбитый. Значит, всего было разбито не менее 50 фонарей. Между любым разбитым фонарем и следующим разбитым фонарем было расположено не более двух других фонарей. Поэтому электрик починил хотя бы один из этих разбитых фонарей. Разделим разбитые фонари на пары последовательно стоящих фонарей. Получится не менее 25 пар. В каждой паре электрик починит хотя бы один фонарь, следовательно, он починит не менее 25 фонарей.

7. Выигрывает Вася. *Указание.* Стратегия Васи очень проста: не снимать гирю массой 2001 г, пока на его чаше весов еще есть другие гири.

8. Если шестизначное число делится на 9, то его можно представить в виде $9n$, где $n=\overline{abcdef}\le111111$. Нам нужно доказать, что десятичная запись числа $9n\cdot111111=n\cdot999999=10^6n-n$ содержит девятку. Запишем это вычитание в столбик:

$$\begin{array}{r} abcdef000000 \\ abcdef \\ \hline \ldots \end{array}$$

Заметим, что если $f=0$, то при вычитании в разряде миллионов окажется девятка. Если $n=111111$, то девятка окажется в разряде единиц. Если же $f\ne0$ и $n<111111$, то хотя бы одна из цифр a, b, c, d, e равна 0 и под этой цифрой из-за переносов в меньший разряд в разности будет находиться девятка.

9. 144 операции.

10. $u/v=2/3$. *Указание.* Если $3u\ne2v$, то $n=\left|3u-2v\right|>0$, а числа

$$3(nu+2)-2(nv+3)=n(3u-2v)=\pm n^2$$

и

$$(nu+2)-(nv+3)=n(u-v)+1$$

делятся на НОД $\left(nu+2,nv+3\right)$, чего не может быть.

11. Фокусники любым способом разбивают 78 карточек на 39 пар и запоминают это разбиение. Какие бы 40 карт зритель ни отдал первому фокуснику, среди них обязательно окажутся две карты из одной пары (так как пар всего 39). Первый фокусник должен дать зрителю две карты из одной пары. Тогда карта, добавленная зрителем, будет из другой пары, и ее без труда сможет определить второй фокусник.

12. Выигрывает Юра. *Указание.* Игрок не может сделать очередной ход лишь тогда, когда на доске остались только две соседние незакрашенные клетки. Такая ситуация может возникнуть только после хода Юры.

13. *Указание.* Треугольник ACE остроугольный. Поэтому центр его описанной окружности O лежит внутри. Докажите, что O служит центром окружности, касающейся всех сторон пятиугольника. Для этого достаточно проверить, что O лежит на биссектрисах углов A, B, D, E.

14. *Указание.* Прямые BE и BF являются внешними биссектрисами углов AEC_1 и CFA_1. Внешняя биссектриса делит противоположную сторону в таком же отношении, что и внутренняя (точнее, в противоположном по знаку), а также в отношении, равном отношению прилежащих сторон. Поэтому отношение сторон $AE:EC_1$ равно 2 (как и $CF:A_1F$).

Далее докажите, что $\angle AC_1E=\angle CA_1F$, а угол E в треугольнике ABE тупой. Следовательно, угол C_1AE острый. Аналогично, угол A_1CF острый. Тогда треугольники C_1AE и A_1CF подобны, и $\angle C_1BE=\angle A_1BF$.

15. $60°$.

Пусть D – точка, симметричная B относительно прямой AL. Ясно, что D лежит на прямой AC. В силу симметрии имеем $KD=KB$ и $\angle BKD=2\angle BKL=60°$, значит, треугольник BKD правильный. Заметим, что BC – биссектриса угла KBD, так как $\angle KBC=30°$; значит, точки D и K симметричны относительно прямой BC. Пусть E –точка пересечения прямых AB и DK. Тогда E симметрична N относительно AL, поэтому треугольник NKE тоже правильный.

Теперь посчитаем углы: $\angle KBM=\angle KDC$ из симметрии относительно AL, $\angle KDC=\angle DKC$ из симметрии относительно BC, углы DKC и MKE равны как вертикальные. Таким образом, $\angle KBM=\angle MKE$. Так как $\angle EMK$ – внешний угол треугольника KBM, получаем, что