

Рис. 11

ная около тетраэдра $SA_1B_1C_1$. Эти сферы пересекаются по окружности γ , описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ (рис.11). Выберем на γ произвольно точку K_1 , пусть K – точка пересечения луча SK_1 со сферой ω . Рассмотрим сечение сфер ω и ω_1 плоскостью $\alpha = SAK$. Пусть l – касательная к сечению сферы ω_1 плоскостью α , проведенная в точке S (рис.12). Тогда $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 = \pi - \angle A_1K_1K = \angle 3$, следовательно $\angle 1 = \angle 3$ и, значит, $AK \parallel l$. Поэтому если β – плоскость, касающаяся ω_1 в точке S , то $AK \parallel \beta$. Поэтому лучи, проведенные из точки S и пересекающие окружность γ , вторично пересекают сферу ω в точках, лежащих в одной плоскости τ . Точки A, B и C лежат в этой плоскости, следовательно, τ проходит через точку O_1 – центр сферы ω .

Теперь рассмотрим множество плоскостей, касающихся ω в точках на окружности γ . Они касаются некоторого конуса с вершиной в точке O (и образующими OA_1, OB_1, OC_1). Проведем плоскость через точки O, O_1 и S . В сечении получатся две пересекающиеся окружности (рис.13), при этом

$$\angle SP_1P = \angle SQ_1Q = 90^\circ,$$

так как $O_1 \in PQ$. Но OP_1 и OQ_1 – касательные к окружностям

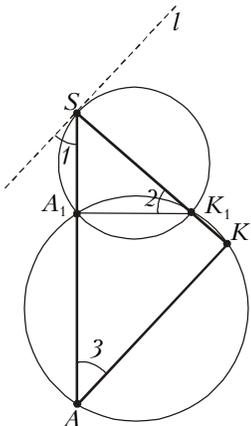


Рис. 12

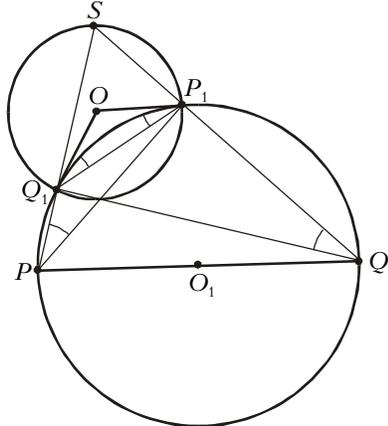


Рис. 13

ти с центром O_1 , поэтому

$$\angle SPP_1 = \angle SQQ_1 = \angle OQ_1P_1 = \angle OP_1Q_1,$$

т.е. ΔO_1OP_1 – равнобедренный и $\angle Q_1O_1P_1 = 180^\circ - 2\angle OQ_1P_1 = 2(90^\circ - \angle SPP_1) = 2\angle Q_1SP_1$. Отсюда и из равенства $OP_1 = OQ_1$ следует, что O – центр окружности, описанной около ΔSP_1Q_1 . Но тогда $OS = OP_1 = OA_1 = OB_1 = OC_1$, т.е. O – центр сферы ω_1 .

XXXV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

1. $v = u\sqrt{\cos^2 \alpha + (1/4)\sin^2 \alpha} \approx 0,67 \text{ м/с}$. 2. $h_{\min} \approx 20 \text{ см}$.

3. $t_a = \frac{t_2\tau_c + t_1\tau_m}{\tau_c + \tau_m} \approx 76^\circ\text{C}$ (здесь $t_2 = 100^\circ\text{C}$),

ная около тетраэдра $SA_1B_1C_1$. Эти сферы пересекаются по окружности γ , описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ (рис.11). Выберем на γ произвольно точку K_1 , пусть K – точка пересечения луча SK_1 со сферой ω . Рассмотрим сечение сфер ω и ω_1 плоскостью $\alpha = SAK$.

Пусть l – касательная к сечению сферы ω_1 плоскостью α , проведенная в точке S (рис.12). Тогда $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 = \pi - \angle A_1K_1K = \angle 3$, следовательно $\angle 1 = \angle 3$ и, значит, $AK \parallel l$. Поэтому если β – плоскость, касающаяся ω_1 в точке S , то $AK \parallel \beta$. Поэтому лучи, проведенные из точки S и пересекающие окружность γ , вторично пересекают сферу ω в точках, лежащих в одной плоскости τ . Точки A, B и C лежат в этой плоскости, следовательно, τ проходит через точку O_1 – центр сферы ω .

Теперь рассмотрим множество плоскостей, касающихся ω в точках на окружности γ . Они касаются некоторого конуса с вершиной в точке O (и образующими OA_1, OB_1, OC_1). Проведем плоскость через точки O, O_1 и S . В сечении получатся две пересекающиеся окружности (рис.13), при этом

$$\angle SP_1P = \angle SQ_1Q = 90^\circ,$$

так как $O_1 \in PQ$. Но OP_1 и OQ_1 – касательные к окружностям

$$t_6 = \frac{t_2\tau_m + t_1\tau_c}{\tau_c + \tau_m} \approx 23,8^\circ\text{C}; \quad \tau_a = \tau_6 = \tau_c + \tau_m = 63 \text{ мин}.$$

4. Минимальный ток течет через резистор сопротивлением R_5 ; $I_{\min} = 2 \text{ мА}$; максимальный ток течет через резистор сопротивлением R_4 ; $I_{\max} = U/R_4 = 13,3 \text{ мА}$.

10 класс

1. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (Ф1795).

2. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (Ф1798).

3. $Q = (24/5)\pi\epsilon_0 UR$; $I = (24/5)\pi UR/\rho$.

4. $I_1 = (I_0 - E_2/R)/2$; $v = \frac{2I_0 l}{C_0(\epsilon - 1)(2E_1 + E_2 - I_0 R)}$.

5. $f_1 = l_1 = 8 \text{ см}$; $l_3 = \frac{l_2 F_0}{2F_0 - l_2} = 24 \text{ см}$.

11 класс

1. $v_{\text{сп}} = 2\pi \frac{Am}{TM} \text{ tg } \alpha$; ящик не будет подпрыгивать при условии

$$\frac{M}{m} > \frac{4\pi^2}{gT^2} \frac{A}{\cos \alpha}.$$

3. $Q = (41,2 \pm 0,4) \text{ мкДж}$.

4. При $0 \leq t \leq \pi\sqrt{L_1 C}$ $I_2(t) = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L_1}} \sin \omega_{01} t$, где

$$\omega_{01} = \frac{1}{2\sqrt{L_1 C}}, \text{ в дальнейшем } I_2(t) = \frac{U_0}{10} \sqrt{\frac{C}{L_1}} \cos(\omega_{02} t + 4), \text{ где}$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{L_1 C}}; \text{ см. рис.14, где } t_1 = \pi\sqrt{L_1 C}, t_2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)t_1,$$

$$t_3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)t_1, t_4 = \left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)t_1.$$

5. См. рис.15, 16 (здесь M и N – середины палочки SP и ее изображения $S'P'$ соответственно, MN – оптическая ось линзы, O – центр линзы, F и F' – ее фокусы); в первом случае линза собирающая, а во втором – рассеивающая.

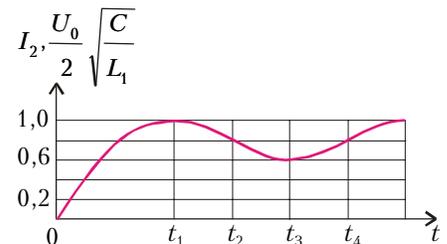


Рис. 14

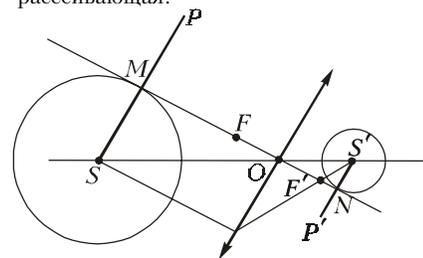


Рис. 14

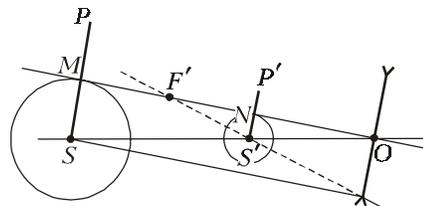


Рис. 15