вательно, прямая m, проходящая через точку A перпендикулярно l, пересекает все многоугольники набора P_2. Значит, равенство $S_1 \cup S_2 = S$ доказано.

Очевидно, все отрезки в P_1' имеют общую точку и в P_2' имеют общую точку тогда и только тогда, когда точки окружности S, имеющие направление m, принадлежат как S_1, так и S_2.

Но если все отрезки из P_1' имеют общую точку и все отрезки из P_2' имеют общую точку, то любые два отрезка из $P_1' \cup P_2'$ имеют общую точку. Тогда все отрезки из $P_1' \cup P_2'$ имеют общую точку.

Следовательно, прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно l, пересекает все многоугольники наборов P_1 и P_2. Таким образом, утверждение задачи доказано, если $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$.

Покажем, что $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$. В самом деле, легко видеть, что множества S_1 и S_2 состоят из конечного числа замкнутых дуг окружности (например, если число элементов в P_1 не больше n, то дуг не больше $2C_n^2$, так как конец каждой дуги соответствует непересекающимся многоугольникам). Так как в каждом множестве есть пара непересекающихся многоугольников, то, отделяя эти многоугольники прямой, мы видим, что $S_1 \not\equiv S$ и $S_2 \not\equiv S$.

Если $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, то $S_1 \cup S_2$ состоит из попарно непересекающихся замкнутых дуг. Возьмем конец одной дуги, тогда между ним и ближайшим концом дуги по часовой стрелке нет точек $S_1 \cup S_2$, что противоречит тому, что $S_1 \cup S_2 = S$.

4. При n участниках.

Докажем, что n участников могло быть. Пример очевиден – пусть каждый ответит только на один вопрос, причем разные участники – на разные вопросы.

Теперь докажем от противного, что не могло быть $n + 1$ участников или более. Представим себе, что мы клонировали каждого участника, т.е. у нас есть неограниченное количество участников каждого из $n + 1$ типов. Докажем, что если мы сможем составить из них две команды, разные по составу (хотя бы для одного типа число участников этого типа в первой команде не равно числу участников этого типа во второй команде), но имеющих одинаковые результаты (т.е. на каждый вопрос в первой команде ответило столько же человек, сколько во второй), то мы пришли к противоречию.

Во-первых, можно считать, что участники каждого типа присутствуют не более чем в одной команде: если в обеих командах есть по участнику одного типа – удалим их, составы команд останутся разными, а результаты будут одинаковыми. Пусть, без ограничения общности, в первой команде участников не меньше, чем во второй. Тогда нельзя назначить баллы за вопросы так, чтобы места всех участников первой команды были выше, чем места участников второй команды, ибо сумма баллов участников первой команды всегда равна сумме баллов участников второй команды.

Осталось доказать, что такие две команды найдутся. Для этого запишем систему линейных уравнений, i-е уравнение которой гласит, что разность числа участников первой и второй команд, ответивших на i-й вопрос, есть ноль; j-й переменной здесь будет число участников j-го типа в команде (в первой, если переменная положительна, во второй – если отрицательна). Это система из n однородных уравнений с $n + 1$ переменной. Как известно, она имеет ненулевое решение, причем, поскольку все коэффициенты рациональны (а они нули или единицы), существует рациональное ненулевое решение. Так как уравнения однородны, решение можно домножить на константу. Домножим так, чтобы значения всех переменных стали целыми. Требуемые команды найдены.

5. Пусть графики трехчленов пересекаются в точке $P(x_0, y_0)$. Тогда

$$f(x) = y_0 + (x - x')(x - x_0);$$
$$g(x) = y_0 + (x - x'')(x - x_0),$$

поэтому

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) =$$
$$= (\alpha+\beta)y_0 + (x - x_0)\big((\alpha+\beta)x - (\alpha x' + \beta x'')\big) =$$
$$= (\alpha+\beta)y_0 + (\alpha+\beta)(x - x_0)^2 \geq (\alpha+\beta)y_0 > 0,$$

если выбрать α и β так, чтобы

$$(\alpha+\beta)x_0 = \alpha x' + \beta x'',$$

т.е. $\beta = \alpha \dfrac{x_0 - x'}{x'' - x_0}$. Это можно сделать, так как $x' < x_0 < x''$.

6. Пусть d – наибольший общий делитель чисел a и b, т.е. $a = da_1$, $b = db_1$, где a_1 и b_1 взаимно просты. Тогда $da_1b_1(a_1 + b_1)$ делится на $a_1^2 + a_1b_1 + b_1^2 = m$. Число $a_1 + b_1$ взаимно просто с числами a_1 и b_1 (в противном случае a_1 и b_1 имеют общий делитель), поэтому из равенств $m = a_1(a_1 + b_1) + b_1^2 = b_1(a_1 + b_1) + a_1^2$ следует, что m взаимно просто с числами a_1, b_1 и $a_1 + b_1$, поэтому d делится на m. Но тогда $d \geq m > a_1b_1$, следовательно, $d^3 > ab$. Поэтому $|a - b| \geq d > \sqrt[3]{ab}$, что и требовалось доказать.

7. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – дорогам. В задаче требуется покрасить вершины этого графа в 2001 – k цветов так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром (такая раскраска называется *правильной*).

Рассмотрим вершину A наибольшей степени, пусть из этой вершины выходит s ребер. Обозначим через V множество из s вершин, соединенных с A, пусть W – множество из 2000 – s оставшихся вершин. Рассмотрим два случая.

1) В множестве W есть две соединенные ребром вершины B и C. Тогда рассмотрим множество U, состоящее из вершины A и всех вершин множества W, кроме C. В этом множестве 2000 – s вершин; любая не входящая в U вершина соединена ребром с одной из вершин множества U (либо с вершиной A, либо с B). Следовательно, $2000 - s \geq k$.

Остается заметить, что из каждой вершины выходит не более s ребер, следовательно, эти вершины можно по очереди покрасить в $s + 1$ цвет так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром (вершину нельзя красить в цвета ее соседей, которых не более чем s, а в нашем распоряжении $s + 1$ цвет). Неравенство $s + 1 = (2000 - s) \leq 2001 - k$ завершает доказательство в этом случае.

2) Никакие две вершины множества W не соединены ребром. Покрасим все эти вершины в цвет 1, в этот же цвет можно покрасить вершину A (она не соединена ребром ни с одной вершиной из W). Заметим, что в этом случае вершины из множества W должны быть соединены с вершинами из множества V (так как из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро). Это означает, что среди вершин множества V есть две, не соединенные ребром (иначе в этом множестве есть вершина, из которой выходит более s ребер к s – 1 остальным вершинам множества V, к вершине A и к вершинам множества W). Так как среди s вершин множества V есть две, не соединенные ребром, вершины этого множества можно покрасить в s – 1 цвет. Таким образом, все вершины оказались раскрашены в s цветов и никакие две вершины не соединены ребром. Так как все s вершин из множества V соединены ребром с вершиной A, то $2001 - s \geq k$, следовательно, $s = 2001 - (2001 - s) \leq 2001 - k$, что и требовалось доказать.

8. Пусть ω – сфера из условия задачи, ω_1 – сфера, описан-