$\left(\frac{r_1}{R}\right)^2 = \left(\frac{BK}{BN}\right)^2 = \frac{BP}{BN} = 1 - \frac{NP}{BN} = 1 - \frac{r}{R}$. Отсюда следует, что отношение $\frac{r_1}{R}$ постоянно.

4. Построим граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра – дорогам. В этом графе между любыми двумя вершинами есть единственный путь, следовательно, в нем нет циклов (такой граф называется *деревом*). По условию, в этом графе есть 100 вершин, из которых выходит ровно одно ребро (такие вершины называются *висячими*) – пусть это вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$. Для каждой пары висячих вершин A_i и A_j существует единственный путь между ними; назовем количество ребер на этом пути *расстоянием* между этими вершинами и будем обозначать через $d(A_i, A_j)$. Из конечности числа способов разбить эти 100 вершин на 50 пар следует, что при одном из способов достигается максимум суммы расстояний между вершинами в парах. Соединим пары вершин при этом разбиении 50 *новыми* ребрами (остальные ребра будем называть *старыми*). Мы докажем, что после этого даже при удалении любого ребра сохраняется *связность* графа (т.е., возможность из любой вершины попасть в любую другую).

Предположим противное: пусть при удалении ребра между вершинами B и C граф распался на две части, которые не связаны между собой. Нетрудно заметить, что удаленное ребро было старым, в одной из полученных частей находится вершина B, а в другой – вершина C. Очевидно, в каждой части должна быть вершина, из которой выходит ровно одно старое ребро, и каждое новое ребро соединяет две вершины из одной части. Но тогда в одной из частей должно быть новое ребро, соединяющее вершины A_i и A_j, а в другой – соединяющее вершины A_k и A_m. Однако в этом случае нетрудно проверить, что

$$d(A_i, A_j) + d(A_k, A_m) < d(A_i, A_k) + d(A_j, A_m),$$

что противоречит максимальности суммы расстояний в выбранных парах. Следовательно, при удалении ребра BC возможность попасть из любой вершины в любую другую должна сохраниться.

5. По условию, $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, следовательно, $P(Q(x)) = (Q(x) - x_1)(Q(x) - x_2)(Q(x) - x_3)$, где $Q(x) - x_i \neq 0$, i = 1, 2, 3. Пусть D_i (i = 1, 2, 3) – дискриминант трехчлена $Q(x) - x_i$. По условию, $D_i < 0$, т.е. $2001 - x_i > \frac{1}{4}$. Перемножив полученные неравенства, имеем

$$P(2001) = (2001 - x_1)(2001 - x_2)(2001 - x_3) > \frac{1}{64}.$$

7. Пусть окружность, проходящая через H, A_1, B_1, пересекает второй раз прямую CH в точке C_1'. Достаточно доказать, что C_1' совпадает с C_1.

Рассмотрим точку F, диаметрально противоположную точке H (рис.10). Углы HA_1F, HB_1F и $HC_1'F$ – прямые, так как опираются на диаметр. Поэтому $A_1F \| BC$, $B_1F \| AC$, $C_1'F \| AB$. Отсюда следует равенство площадей $S_{BFC} = S_{BA_1C}$ (в треугольниках BFC и BA_1C основание общее, а высоты равны), аналогично, $S_{CFA} = S_{CB_1A}$ и $S_{AFB} = S_{AC_1'B}$.

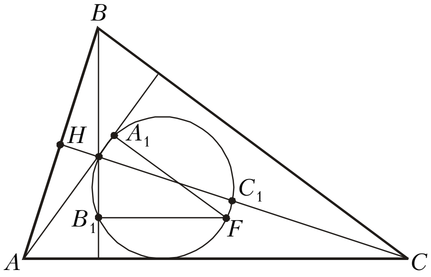

Рис. 10

Заметим, что точка F лежит внутри треугольника ABC: поскольку A_1 и B_1 лежат на высотах, а не на их продолжениях, точка F лежит внутри угла ACB; если бы при этом F лежала вне треугольника ABC, то сумма площадей $S_{AFC} + S_{BFC} = S_{AB_1C} + S_{BA_1C}$ была бы больше площади S треугольника ABC – противоречие с условием; таким образом, C_1' лежит на высоте, а не на ее продолжении. Ввиду равенств $S = S_{AFB} + S_{BFC} + S_{CFA} = S_{AC_1B} + S_{BA_1C} + S_{CB_1A}$ получаем, что $S_{AC_1'B} = S_{AC_1B}$, откуда следует совпадение точек C_1 и C_1'.

8. $n = p^3$, где p – простое, или n = 12.

Легко видеть, что указанные в ответе числа удовлетворяют условию задачи. Покажем, что других чисел, удовлетворяющих условию, не существует.

Случай нечетного n рассмотрен в решении задачи 8 для 9 класса. Пусть n четно и не является степенью двойки; представим его в виде $n = 2^m \cdot k$, где $m \geq 1$, а $k > 1$ – нечетное число. Заметим, что $k + 2 - 1 = k + 1$ – делитель n. Поскольку $(k+1, k) = 1$, то $k + 1 = 2^\alpha$, $\alpha > 1$. Поэтому $2^2 + k - 1 = k + 3$ – тоже делитель n. Заметим, что $k + 3 = (k+1) + 2 = 2^\alpha + 2$ не делится на 2^2. Кроме того, $(k+3, k) = (3, k) \leq 3$. Из этого заключаем, что $k + 3 \leq 2 \cdot 3 = 6$, и $k \leq 3$. Значит, $n = 2^m \cdot 3$. Но m = 1 не подходит; $m \geq 3$ также не подходит, так как в этом случае мы получили бы, что $2^3 + 3 - 1 = 10$ также делитель n.

11 класс

1. 97 средних чисел.

Заметим, что если число $k = m$ является средним, то число $k = 100 - m$ также является средним. Поэтому если число $k = 1$ не является средним, то число k = 99 также не является средним и количество средних чисел не больше 97 ($k \neq 100$). Если же число k = 1 является средним, то вес одной из гирек равен S и, следовательно, только k = 99 также является средним числом. Значит, количество средних чисел не превосходит 97.

Приведем пример набора из 100 гирек с весами $a_1, \ldots, a_{100}$, для которого все числа от 2 до 98 (всего 97 чисел) – средние. Пусть $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, n = 1, 2, …, 97 – последовательные числа Фибоначчи и $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{98}$. Выберем $a_{100} = S - a_{99}$. Тогда суммарный вес всех гирек равен $2S$ и в то же время

$$a_{100} + a_{99} = a_{100} + a_{98} + a_{97} = a_{100} + a_{98} + a_{96} + a_{95} =$$
$$= a_{100} + a_{98} + a_{96} + a_{94} + a_{93} =$$
$$= a_{100} + a_{98} + a_{96} + a_{94} + a_{92} + a_{90} + \ldots + a_6 + a_4 + a_3 + a_2 = S.$$

Следовательно, средними являются числа 2, 3, 4, …, 51. Но тогда средними будут и числа 100 − 2 = 98, 100 − 3 = 97, … …, 100 − 48 = 52, т.е. все числа от 2 до 98 – средние.

3. Для каждой из прямых, пересекающих все многоугольники набора P_1, проведем параллельную ей прямую через центр O некоторой окружности S. Обозначим через S_1 множество точек пересечения этих прямых с S. Определим аналогично для набора P_2 множество $S_2 \subset S$.

Покажем, что $S_1 \cup S_2 = S$. Спроектируем многоугольники наборов P_1 и P_2 на произвольную прямую l. Из условия следует, что при этом получатся два набора отрезков P_1' и P_2' таких, что любые два отрезка из разных наборов имеют общую точку.

Возьмем отрезок I, левый конец A которого является среди полученных отрезков самым правым. Пусть, например, I принадлежит P_1', тогда все отрезки P_2' содержат точку A. Следо-