$P(x)-Q(x)\ge 0$, т.е. $(x-x_1)(x-x_2)(x^2+Ax+B-1)\ge 0$ при всех x. Это возможно только тогда, когда $x^2+Ax+(B-1)=(x-x_1)(x-x_2)$, т.е. при $A=-(x_1+x_2)$, $B-1=x_1x_2$. Поэтому дискриминант трехчлена x^2+Ax+B, равный $D=(x_1-x_2)^2-4$ положителен. Но тогда $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$ (возможны совпадения корней x_3 и x_4 с x_1 или x_2, но при этом $x_3\ne x_4$), т.е. $P(x)$ не может быть отрицательным только в интервале $I=(x_1;x_2)$. Противоречие.

3. Пусть M – середина стороны CD, а L – середина стороны AD. Достроим параллелограмм $ABCD$ до треугольника BA_1C_1 так, чтобы отрезок AC был средней линией треугольника BA_1C_1 (рис.7). Для этого через точку D проведем прямую,

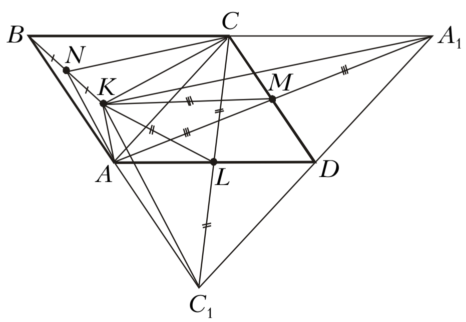

Рис. 7

параллельную AC, и обозначим через A_1 и C_1 точки пересечения этой прямой с продолжениями сторон BC и BA соответственно. Четырехугольники ACA_1D и CAC_1D – параллелограммы, а точки A, M и A_1 лежат на одной прямой. Следовательно, в треугольнике AKA_1 угол K – прямой, поскольку точка M равноудалена от точек A, A_1 и K. Аналогично доказывается, что $\angle CKC_1=90^\circ$. Таким образом,

$$\angle CKA_1=90^\circ-\angle A_1KC_1=\angle C_1KA.$$

Отрезки CN и KA_1 параллельны, ибо CN – средняя линия в треугольнике KBA_1. Аналогично параллельны отрезки AN и KC_1. Следовательно,

$$\angle NCK=\angle CKA_1=\angle C_1KA=\angle NAK.$$

4. Уберем вершину A_{2000} данного многоугольника $A_1A_2\ldots A_{2000}$. Назовем *средними* диагоналями многоугольника $A_1A_2\ldots A_{1999}$ отрезки, соединяющие вершины, номера которых отличаются на 999 или 1000. Рассмотрим все средние диагонали, их ровно 1999 штук, причем любые две из них пересекаются, а из каждой вершины выходят ровно две средние диагонали. Поскольку $1999>2\cdot 999$, то найдутся три одноцветные средние диагонали, они попарно пересекаются в трех разных точках. Эти точки пересечения и являются вершинами искомого треугольника.

5. 500 или 501.

Рассмотрим любые четыре подряд идущие монеты. Докажем, что среди них ровно одна трехкопеечная. Предположим противное. Если среди этих монет не оказалось ни одной трехкопеечной, то однокопеечные и двухкопеечные монеты чередуются, что невозможно. Двух трехкопеечных монет тоже не может быть, поскольку между ними должно быть хотя бы три монеты. Таким образом, среди первых 2000 монет ровно 500 трехкопеечных. Следовательно, всего трехкопеечных монет может быть 501 или 500. Оба ответа возможны, например,

3121312131213...31213 и 2131213121312...21312.

7. Пусть P и Q – середины сторон AB и BC соответственно, P_1, K_1, Q_1, M_1 – проекции точек P, K, Q, M на сторону AC (рис.8). Тогда $P_1Q_1=\frac{1}{2}AC$ и, по условию, $K_1M_1=\frac{1}{2}AC$, поэтому $P_1Q_1=K_1M_1$,

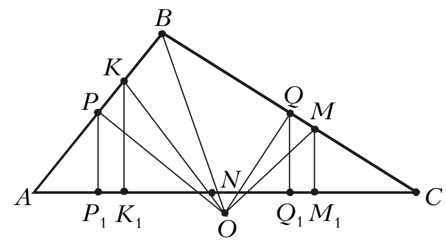

Рис. 8

следовательно, если точка K ближе к вершине B, чем точка P, то точка Q ближе к B, чем точка M. Из условия следует, что $OP\perp AB$, $OQ\perp BC\Rightarrow \angle POQ=\pi-\angle B$. Поэтому утверждение задачи равносильно равенству $\angle KOM=\angle POQ$, т.е., с учетом установленного расположения точек, подобию прямоугольных треугольников OPK и OQM.

Пусть $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCA=\gamma$. Тогда $PK=P_1K_1:\cos\alpha$, $QM=Q_1M_1:\cos\gamma$. Но $P_1Q_1=K_1M_1\Rightarrow P_1K_1=Q_1M_1$, и $PK:QM=\cos\gamma:\cos\alpha$.

С другой стороны, $\angle AOB=2\gamma\Rightarrow\angle BOP=\gamma\Rightarrow OP=R\cos\gamma$, где R – радиус описанной окружности. Аналогично, $OQ=R\cos\alpha\Rightarrow OP:OQ=\cos\gamma:\cos\alpha=PK:QM$ и, значит, $\Delta OPK\sim\Delta OQM$.

8. $n=p^m$, где p – простое число, $m\in\mathbf{N}$.

Предположим, что n не является степенью простого числа. Пусть p – наименьший простой делитель числа n. Представим n в виде $p^m\cdot k$, где $k\not\vdots\, p$. По условию число $l=p+k-1$ является делителем n. Покажем, что l взаимно просто с k. Предположим противное. Если $(l,k)>1$, то $(p-1,k)=(l-k,k)=(l,k)>1$. Таким образом, число k имеет какой-то делитель d, $2\le d\le p-1$. Противоречие с выбором числа p. Следовательно, $p+k-1=p^\alpha$. Ясно, что $\alpha\ge 2$, ибо $k>1$. Таким образом, числа p^2 и k – взаимно простые делители числа n, т.е. p^2+k-1 – делитель числа n. При этом p^2+k-1 взаимно просто с k, поскольку в противном случае k имеет общий делитель с $p^2-1=2(p-1)\cdot\frac{p+1}{2}$, что снова противоречит выбору числа p. Следовательно, $p^2+k-1=p^\beta$, где $\beta\ge 3$. Но тогда

$$p^\beta=p^2+k-1=p^2+(p+k-1)-p=p\left(p+p^{\alpha-1}-1\right)\not\vdots\, p^2.$$

Противоречие, следовательно, $k=1$. Нетрудно убедиться, что полученные числа удовлетворяют условию.

10 класс

3. Обозначим внешнюю окружность через Ω, внутреннюю – ω, описанную окружность треугольника BKM – ω_1, их радиусы – R, r и r_1 соответственно. Пусть отрезок BN пересекает ω в точке P (рис.9). Рассмотрим гомотетию H с центром в точке N, переводящую внутреннюю окружность во внешнюю. Тогда $H(P)=B$, $H(AB)=l$, где l – касательная к Ω, параллельная AB, т.е. проходящая через точку M. Следовательно, $H(K)=M$, т.е. точки N, K, M лежат на одной прямой. Тогда, по теореме синусов,

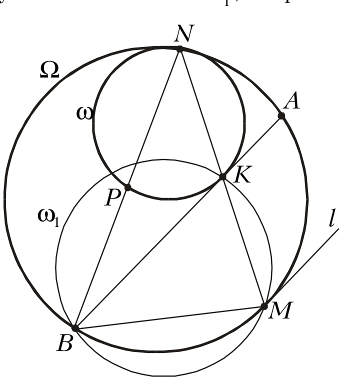

Рис. 9

$BK:BN=(2r_1\sin\alpha):(2R\sin\alpha)=r_1:R$, где $\alpha=\angle BMN$. Кроме того, $NP:BN=r:R$. Далее, $BK^2=BP\cdot BN$, поэтому