

Рис. 4

5. Можно. Например, свет, идущий от фонарика (рис.5), отразится зеркалом, попадет на предмет А, и его изображение

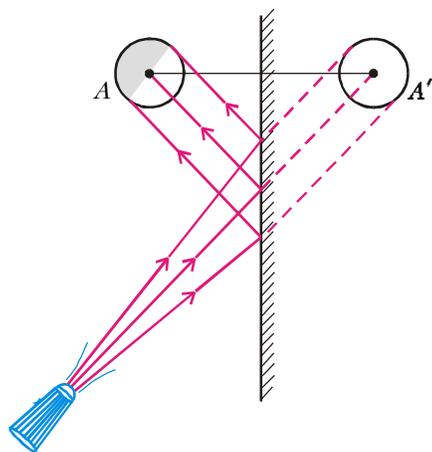


Рис. 5

10. Вследствие капиллярных эффектов вода поднимается по карандашу, и ее поверхность вблизи него искривляется. Лучи света преломляются на искривленной поверхности воды так, что на тени карандаша появляется светлый промежуток.

11. Из-за копоти поверхность монеты покрыта слоем воздуха, на границе которого с водой происходит полное отражение освещающего монету света.

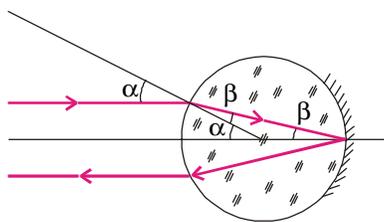


Рис. 6

лучей, идущих внутри стекла, создает ряд дополнительных изображений.

14. Изображение свечи приблизится к зеркалу.

15. При прохождении через толченное стекло свет пересекает множество границ раздела стекло–воздух, на каждой из которых происходит не только преломление, но и отражение. Из-за этого свет практически не проходит сквозь толченное стекло, и оно выглядит белым. В воде, показатель преломления которой близок к показателю преломления стекла, отражение на границах раздела, а также отклонение лучей при преломлении резко уменьшаются, поэтому в воде толченное стекло почти прозрачно.

Микроопыт

Закрытый глаз вновь не будет виден. Причина – в обратимости световых лучей: падающий и отраженный лучи меняются местами.

так что часть отраженного света попадает в глаза водителю.

2. Нет, нельзя. Отражение от экрана должно быть рассеянным – иначе зрители не увидят изображения.

3. На расстоянии $l/2$ от зеркала (рис.4).

4. Если на зеркало падает сходящийся пучок лучей.

A' в зеркале станет также более освещенным.

6. Ошибся художник, сделавший рисунок а). Подводная часть палки должна казаться нам приподнятой из-за преломления на границе вода–воздух.

7. Лучи останутся параллельными.

8. Нет, так как показатель преломления у воды меньше, чем у стекла.

9. Нет, не может.

12. $n = 2$ (так как $\alpha = 2\beta$; рис.6).

13. Изображение лампы получается при отражении лучей света от задней (посеребренной) и от передней грани стекла. Кроме того, многократное отражение от обеих граней лучей,

Корпускулярные и волновые свойства света

1. $n = \frac{e\lambda W}{chI_n} \approx 100.$

2. $\Delta\lambda = \frac{h}{2m_p c} \approx 6,6 \cdot 10^{-16} \text{ м}$ (здесь $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ – масса протона).

3. $m = \frac{2H\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{\lambda} \approx 360$; $\Delta x = \frac{\lambda L\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}{H \sin \varphi \cos^2 \varphi} \approx 2,8 \text{ см};$

$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \approx 1,6 \text{ нм}.$

Иррациональные уравнения

1. а) \emptyset ; б) -2 ; в) $4 + 2\sqrt{7}$; г) \emptyset ; д) 3 ; е) $-1/2$; ж) $3/2$; з) $1/2$.

2. а) $99/49$; б) $(5 \pm 2\sqrt{2})/2$; в) $1 \pm \sqrt{3}$. *Указание.* Сделайте замену $u = \sqrt{2x^2 - 4x + 12}$; г) 12 ; д) 4 ; е) $(-1 \pm \sqrt{17})/2$; ж) $-1/\sqrt{2}$; з) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$. *Указание.* Возведите в квадрат, а затем выполните замену $t = 2x\sqrt{1-x^2}$; з) $(1 + \sqrt{37})/2$.

3. а) $11 - a + 4\sqrt{7-2a}$ при $a < 1,5$; $11 - a \pm 4\sqrt{7-2a}$ при $1,5 \leq a \leq 3,5$; \emptyset при $a > 3,5$; б) \emptyset при $a < (1 + \sqrt{17})/4$; $(17 + \sqrt{17})/4$ при $a = (1 + \sqrt{17})/4$;

$3a^2 - a - 1 \pm 2a\sqrt{2a^2 - a - 2}$ при $(1 + \sqrt{17})/4 < a \leq 2$;

$3a^2 - a - 1 + 2a\sqrt{2a^2 - a - 2}$ при $a > 2$; в) $12 - 2a + 4\sqrt{8-3a}$ при $a < 4/3$; $12 - 2a \pm 4\sqrt{8-3a}$ при $4/3 \leq a < 8/3$; $20/3$ при $a = 8/3$; \emptyset при $a > 8/3$; г) \emptyset при $a < -3/8$ и $0 < a < 3/8$; $12a^2 - 2a + 4a\sqrt{8a^2 - 3a}$ при $-3/8 \leq a \leq 0$ и $a > 4/3$; $12a^2 - 2a \pm 4a\sqrt{8a^2 - 3a}$ при $3/8 < a \leq 4/3$; $15/16$ при $a = 3/8$.

4. а) $-3/4$; б) $3/4$; в) $(7 - \sqrt{13})/6$; г) $(5 - 3\sqrt{5})/15$; д) 1 ; е) 5 .

5. а) 3 ; б) 1 ; в) 1 ; г) $(3 + \sqrt{13})/2$. *Указание.* При $x \geq 0$ уравнение равносильно такому:

$$x = \sqrt{3\sqrt{3x+1} + 1},$$

а при $x < 0$ корней нет.

6. а) 2 ; б) 2 . 7. а) -1 ; б) 2 .

XXVII Всероссийская олимпиада школьников по математике

Заключительный этап

9 класс

1. Эти суммы равны. *Указание.* Разбейте числа от n^2 до $(n+1)^2 - 1$ на две группы $A_n = \{n^2, n^2 + 1, \dots, n^2 + n\}$ и $B_n = \{n^2 + n + 1, n^2 + n + 2, \dots, n^2 + 2n\}$. Для чисел группы A_n ближайшим квадратом является n^2 , для B_n ближайшим является $(n+1)^2$ – квадрат другой четности. Докажите, что $S(B_n) = S(A_n)$.

2. Из условия следует, что $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, где $x_2 - x_1 > 2$, и $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x^2 + Ax + B)$, так как $P(x_1) = Q(x_1) = 0$, $P(x_2) = Q(x_2) = 0$. Предположим, что