Заметим, что функция $f(x)$ возрастающая, и докажем, что уравнение (5) равносильно уравнению

$$f(x) = x. \qquad (6)$$

Для этого заметим, что всякий корень уравнения (6) есть корень уравнения (5). Пусть x_0 — корень уравнения (5), причем $f(x_0) \neq x_0$. Тогда либо $f(x_0) > x_0$, но при этом $f(f(x_0)) = x_0 > f(x_0)$, противоречие; либо $f(x_0) < x_0$, но в этом случае $x_0 = f(f(x_0)) < f(x_0)$, т.е. $x_0 < f(x_0)$, что также невозможно. Утверждение доказано. Чтобы завершить решение, достаточно решить уравнение $x = \sqrt{1+x}$.

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 5. Решите уравнения

а) $\sqrt{15x+4} + \sqrt{x+1} = 9$;

б) $x\left(\sqrt{x^2+3x+5} + \sqrt{x}\right) = 5 - x^2$;

в) $\sqrt{x^2+2x+6} + \sqrt{x+3} = 6 - x$;

г) $x^2 - 3\sqrt{3x+1} = 1$.

Область определения

На следующем примере мы рассмотрим еще один класс задач.

Пример 14. *Решите уравнение*

$$\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+7} - \sqrt{4x+1}.$$

Решение. В области определения данного уравнения должны одновременно выполняться неравенства $4 - x^2 \geq 0$ и $x \geq 2$, что возможно только при $x = 2$. Проверкой убеждаемся, что это — корень.

Ответ: 2.

Упражнение 6. Решите уравнения

а) $\sqrt{x^2-3x+2} + 2\sqrt{4-x^2} + 1 = \sqrt{x-1}$;

б) $\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{x}} + \sqrt{x^2-x-2} + \sqrt{3x^2+4} = 4$.

Ограниченность функций

Здесь мы тоже разберем достаточно характерные примеры.

Пример 15. *Решите уравнение*

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+5} - x^2 = 5 + 2x.$$

Решение. Перепишем уравнение:

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+5} = x^2 + 2x + 5.$$

Пусть $t = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+5}$. Тогда

$$t^2 = 8 + 2\sqrt{15-2x-x^2}.$$

Наибольшее значение подкоренного выражения достигается при $x = -1$ (в вершине параболы $y = 15 - 2x - x^2$). При этом $t^2 = 16$. Отсюда следует, что $t \leq 4$. Наименьшее значение правой части исходного уравнения достигается также при $x = -1$ и тоже равно 4. При $x \neq -1$ левая часть (когда она существует) меньше правой.

Ответ: −1.

И наконец. еще один пример, в решении которого мы воспользуемся свойством суммы двух взаимно обратных положительных чисел: $a + \frac{1}{a} \geq 2$, причем равенство достигается лишь при $a = 1$.

Пример 16. *Решите уравнение*

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x^2-x+1}} + \sqrt{\frac{x^2-x+1}{2x-1}} = \sqrt{4x-x^2}.$$

Решение. Пусть $t = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2-x+1}} > 0$. Левая часть уравнения, равная $t + \frac{1}{t}$, больше или равно 2:

$$t + \frac{1}{t} \geq 2,$$

а правая часть не больше 2:

$$\sqrt{4x-x^2} = \sqrt{4-(x-2)^2} \leq 2.$$

Поэтому равенство возможно только при $x = 2$. Проверкой убеждаемся, что $x = 2$ — корень.

Ответ: 2.

Упражнение 7. Решите уравнения

а) $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4 - 2x - x^2$;

б) $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2 - 4x + 6$.

Корпускулярные и волновые свойства света

В. МОЖАЕВ

В этой статье мы рассмотрим задачи, в которых проявляются либо корпускулярные, либо волновые свойства света. Действительно, в таких оптических явлениях, как излучение или поглощение света веществом, фотоэлектрический эффект или эффект Комптона, проявляются корпускулярные свойства света. В этих случаях свет ведет себя как поток световых частиц − фотонов, обладающих энергией E и импульсом $p = E/c$ (где c − скорость света). А вот такие оптические явления, как интерференция или дифракция, явно свидетельствуют в пользу волновых представлений, когда свет ведет себя как электромагнитная волна с частотой ν и длиной волны $\lambda = c/\nu$. Отметим, что известные соотношения $E = h\nu$ и $p = h\nu/c$ (где h − постоянная Планка) как раз и связывают волновые и корпускулярные свойства света: правые части равенств содержат типичную для волновых представлений величину ν, а левые − характерные для потока частиц величины E и p.

А теперь − несколько конкретных задач.

Задача 1. *Рубиновый лазер, работающий в импульсном режиме с длительностью импульса $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$ с, излучает параллельный пучок света с энергией E = 1 Дж. Определите силу светового давления на шарик, освещаемый этим светом, если диаметр шарика равен (или больше) диаметру лазерного пучка, а поверхность шарика полностью поглощает падающее на нее излучение.*

До поглощения лазерного излучения импульс шарика был равен нулю: $p_1 = 0$. После поглощения фотонов за время τ шарик приобрел импульс $p_2 = E/c$. Сила F, которая подействовала на шарик со стороны фотонов, равна

$$F = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{p_2 - p_1}{\tau} = \frac{E}{c\tau} = 6{,}7 \cdot 10^{-6}\ \text{Н}.$$