ж) $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2x^2$;

з) $\sqrt{9-\dfrac{9}{x}}=x-\sqrt{x-\dfrac{9}{x}}$.

3. Решите уравнения с параметром

а) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-a}=2$;

б) $\sqrt{2x+a}-\sqrt{x-1}=a$;

в) $\sqrt{2x+a}-\sqrt{x-a}=2$;

г) $\sqrt{2x+a}-\sqrt{x-a}=2a$.

Умножим на сопряженное

В основе рассматриваемого способа решения лежит формула

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b.$$

Выражения $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ мы будем называть сопряженными. Иногда использование этой формулы облегчает решение.

Пример 9. *Решите уравнение*

$$\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+3}=2x-1.$$

Решение. Домножим левую и правую части уравнения на сумму радикалов, стоящих в левой части. Получается уравнение

$$2(2x-1)=(2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right),$$

равносильное такому:

$$(2x-1)\left(2-\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right)\right)=0,$$

откуда либо $x=1/2$, либо

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}=2.$$

Последнее уравнение решим уже рассмотренным способом: пусть $t=\sqrt{x+3}\ge 0$. Тогда приходим к уравнению

$$\sqrt{5t^2-14}=2-t,$$

откуда $t=\dfrac{-1+\sqrt{19}}{2}$, а $x=\dfrac{4-\sqrt{19}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{4-\sqrt{19}}{2}$.

Заметим, что умножение на сумму радикалов в данном случае не приводит к появлению посторонних корней — ведь область определения этой суммы та же, что у исходного уравнения, и она положительна как сумма неотрицательных слагаемых, не обращающихся, очевидно, в ноль одновременно.

Отметим также, что решить уравнение из примера 9 «в лоб» довольно трудно — оно путем громоздких вычислений сводится к уравнению четвертой степени.

Посмотрите, насколько эффективно работает этот метод в двух следующих примерах, которые оказались по силам очень небольшому проценту поступающих.

Пример 10 (геологический факультет МГУ, 1985). *Решите уравнение*

$$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}.$$

Решение. Пусть $A=3x^2-1$, $B=3x^2+2x+1$, $C=x^2-x+1$, $D=x^2+2x+4$. Перепишем наше уравнение:

$$\sqrt{C}-\sqrt{D}=\sqrt{B}-\sqrt{A},$$

откуда (так как $\sqrt{m}-\sqrt{n}=\dfrac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$) получаем

$$\frac{C-D}{\sqrt{C}+\sqrt{D}}=\frac{B-A}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}.$$

Поскольку $C-D=-3(x+1)$, а $B-A=2(x+1)$, приходим к равенству

$$\frac{-3(x+1)}{\sqrt{C}+\sqrt{D}}=\frac{2(x+1)}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+1)\left(\frac{2}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}+\frac{3}{\sqrt{C}+\sqrt{D}}\right)=0,$$

а поскольку второй сомножитель, очевидно, положителен, имеем $x=-1$. Проверкой убеждаемся, что $x=-1$ — корень данного уравнения.

Ответ: -1.

Пример 11 (геологический факультет МГУ, 1985). *Решите уравнение*

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}.$$

Указание. Область определения уравнения: $x\ge -1/2$, при таких x мы можем применить формулу $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$. Поэтому перепишем уравнение так:

$$\left(\sqrt{2x-1}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2}\right)=4.$$

Домножив левую и правую части на разность $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}$, получим

$$\sqrt{2x-1}-3=\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}.$$

Осталось возвести в квадрат, а затем найти и проверить корни.

Ответ: 7.

Упражнение 4. Решите уравнения

а) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+4}=4x+3$;

б) $\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-x+1}=4x-3$;

в) $\sqrt{45x+12}-\sqrt{15x+2}=\sqrt{10}(3x+1)$;

г) $\sqrt{(x+4)(2x+3)}-3\sqrt{x+8}=4-\sqrt{(x+8)(2x+3)}+3\sqrt{x+4}$;

д) $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2+2}=\sqrt{3x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+3x-1}$;

е) $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=|5-x|$.

В школьном курсе математики вы изучали свойства многих элементарных функций. Их иногда можно с успехом применять и при решении уравнений. Ограничимся несколькими примерами.

Монотонность функций

Начнем с примера.

Пример 12. *Решите уравнение*

$$\sqrt{7x+9}+\sqrt{15x+1}=9-\sqrt{2x-1}.$$

Решение. Это уравнение можно попытаться решить возведением в квадрат (трижды!). Однако при этом, во-первых, получится уравнение четвертой степени и, во-вторых, его коэффициенты будут ужасны. Попробуем угадать корень. Это сделать нетрудно: $x=1$. Теперь заметим, что левая часть уравнения — возрастающая функция, а правая — убывающая. Но это значит, что больше одного корня такое уравнение иметь не может. Итак, $x=1$ — единственный корень.

Ответ: 1.

Вообще в случае (это относится не только к иррациональным уравнениям), если уравнение имеет вид

$$f(x)=0,$$

где $f(x)$ возрастает (убывает), или

$$f(x)=g(x),$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ «встречно монотонны», т.е. $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает, то такое уравнение имеет не более одного корня. Если вам удалось заметить это или привести уравнение к такому виду и если вы сможете угадать корень, то он и будет решением данного уравнения.

И еще один любопытный пример.

Пример 13. *Решите уравнение*

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=x.$$

Здесь после освобождения от радикалов получится полное уравнение 4-й степени, так что поищем какой-нибудь другой путь решения.

Решение. Пусть $f(x)=\sqrt{1+x}$. Наше уравнение имеет вид

$$f(f(x))=x. \qquad (5)$$