квадрат,

$$x^2 - 92x + 180 = 0. \qquad (2)$$

Возводить в квадрат число 46 без калькулятора — занятие довольно неприятное. Поэтому попробуем угадать корень. Легко понять (просто перебирая первые квадраты: 1, 4, 9, 16, 25... и приравнивая им двучлен $7x - 5$ – «наименьший» из подкоренных выражений), что $x_1 = 2$ удовлетворяет уравнению (1), а значит — и (2). По теореме Виета второй корень уравнения (2) это $x_2 = 90$, причем оба корня удовлетворяют второму, а следовательно, и исходному уравнению.

Замечание. Вообще в случаях, когда корни, получаемые в результате последовательных возведений в квадрат, достаточно простые (например, целые), можно не заботиться о равносильности переходов и в конце решения просто проверить их прямой подстановкой. В более сложных случаях, когда прямая проверка затруднена, приходится тщательно следить за возможностью появления посторонних корней.

Пример 5. *Решите уравнение*

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-2} = 3.$$

Первое решение. Переписываем уравнение так:

$$\sqrt{3x-1} = 3 + \sqrt{x-2}.$$

Возводим в квадрат и упрощаем:

$$3\sqrt{x-2} = x - 4.$$

Повторное возведение в квадрат дает уравнение

$$x^2 - 17x + 34 = 0$$

с корнями

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm 3\sqrt{17}}{2}.$$

Неравенству $x \ge 4$ удовлетворяет лишь $x = \dfrac{17 + 3\sqrt{17}}{2}$. (Можно подставить $x = 4$ в трехчлен $x^2 - 17x + 34$ — см. конец решения примера 3.)

Второе решение. Выполним замену $t = \sqrt{x-2} \ge 0$, откуда $x = t^2 + 2$. Приводим уравнение к виду

$$\sqrt{3t^2 + 5} = 3 + t.$$

После возведения в квадрат и упрощений получаем

$$t^2 - 3t - 2 = 0, \qquad (3)$$

откуда $t_1 = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{2}$ (второй корень $t_2 = \dfrac{3 - \sqrt{17}}{2}$ отрицателен). Теперь вычисляем корень исходного уравнения:

$$x = t^2 + 2 = 3t + 4 = \frac{17 + 3\sqrt{17}}{2}$$

(мы опять воспользовались уравнением (3), для корней которого верно, что $t^2 + 2 = 3t + 4$).

Ответ: $\dfrac{17 + 3\sqrt{17}}{2}$.

Вообще же подстановка вида $t = \sqrt{ax+b} \ge 0$ часто упрощает решение уравнений вида

$$\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} = e.$$

После замены получаем уравнение вида $\sqrt{kt^2 + n} = mt + p$. Существенно здесь то, что при решении квадратного уравнения

$$At^2 + Bt + C = 0,$$

к которому приходим после однократного возведения последнего уравнения в квадрат, приходится выявлять лишь неотрицательные корни, что также достаточно просто.

Рассмотрим теперь два уравнения с «двухэтажными радикалами».

Пример 6. *Решите уравнение*

$$\sqrt{2 - \sqrt{x+1}} + \sqrt{2 + \sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x}.$$

Решение. Возведя уравнение в квадрат и приведя подобные члены, получаем простейшее уравнение

$$\sqrt{3 - x} = 2(x - 1),$$

решая которое, приходим к ответу.

Ответ: $\dfrac{7 + \sqrt{33}}{8}$.

Пример 7. *Решите уравнение*

$$\sqrt{x + \sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2.$$

Решение. Пусть $t = \sqrt{x-1} \ge 0$. Тогда $x = t^2 + 1$, и уравнение принимает вид

$$\sqrt{t^2 + t + 1} + \sqrt{t^2 - 2t + 1} = 2.$$

Заметив, что под вторым знаком радикала стоит $(t-1)^2$, получаем

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = 2 - |t - 1|.$$

При $0 \le t < 1$ имеем

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = 1 + t,$$

откуда

$$t = 0, \text{ а } x_1 = 1.$$

При $t \ge 1$ приходим к уравнению

$$\sqrt{t^2 + t + 1} = 3 - t,$$

единственный корень которого $t = 8/7$ удовлетворяет условию $t \ge 1$. Итак,

$$x_2 = 1 + 64/49 = 113/49.$$

Ответ: 1; $113/49$.

Рассмотрим еще уравнение с параметром.

Пример 8. *Решите уравнение*

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-2} = a.$$

Решение. ОДЗ исходного уравнения: $x \ge 2$. При этом $(2x-1) - (x-2) = x + 1 > 0$, т.е. левая часть исходного уравнения положительна, поэтому $a \ge 0$. Пусть $t = \sqrt{x-2} \ge 0$. Тогда $x = t^2 + 2$, и уравнение приводится к виду

$$\sqrt{2t^2 + 3} = a + t.$$

Возведем в квадрат и упростим:

$$t^2 - 2at + 3 - a^2 = 0. \qquad (4)$$

Условие разрешимости этого уравнения дает

$$\frac{D}{4} = 2a^2 - 3 \ge 0,$$

т.е. (учитывая, что $a > 0$) $a \ge \sqrt{3/2}$, при этом $t_{1,2} = a \pm \sqrt{2a^2 - 3}$.

При $a = \sqrt{3/2}$ уравнение (4) имеет один корень $t = \sqrt{3/2}$, а $x = 3/2 + 2 = 7/2$.

Если $\sqrt{3/2} < a \le \sqrt{3}$, свободный член уравнения (4) неотрицателен и, следовательно, оба его корня неотрицательны (ведь $t_1 + t_2 = 2000$). Для них

$$x_{1,2} = t_{1,2}^2 + 2 = 3a^2 - 1 \pm 2a\sqrt{2a^2 - 3}.$$

Если же $a > \sqrt{3}$, годится только неотрицательный корень (с плюсом), т.е. тогда

$$x = 3a^2 - 1 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}.$$

Ответ: корней нет при $a < \sqrt{3/2}$;
$x = 7/2$ при $a = \sqrt{3/2}$;
$x_{1,2} = 3a^2 - 1 \pm 2a\sqrt{2a^2 - 3}$ при $\sqrt{3/2} < a \le \sqrt{3}$;
$x = 3a^2 - 1 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}$ при $a > \sqrt{3}$.

Упражнения

2. Решите уравнения

а) $\sqrt{8x+1} - \sqrt{x-2} = 4$;

б) $\sqrt{3x+2} - \sqrt{x-1} = 2$;

в) $2x^2 + \sqrt{2x^2 - 4x + 12} = 4x + 8$;

г) $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}} + \sqrt{\dfrac{20-x}{x}} = \sqrt{6}$;

д) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$;

е) $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + x + 5} = \sqrt{2x^2 + 2x + 17}$;