Сейчас нам это понадобится, чтобы найти малое изменение скорости капельки:

$$\Delta\vec{v} = \Delta\left(v_r \cdot \vec{e}_r + v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi\right) =$$

$$= \Delta\left(v_r \cdot \vec{e}_r\right) + \Delta\left(v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi\right) =$$

$$= \vec{e}_r \cdot \Delta v_r + v_r \cdot \Delta\vec{e}_r + \vec{e}_\varphi \cdot \Delta v_\varphi + v_\varphi \cdot \Delta\vec{e}_\varphi =$$

$$= \vec{e}_r \cdot \Delta v_r + v_r \Delta\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + \vec{e}_\varphi \cdot \Delta v_\varphi - v_\varphi \Delta\varphi \cdot \vec{e}_r.$$

Мы уже подставили сюда выражения для $\Delta\vec{e}_r$ и $\Delta\vec{e}_\varphi$. А теперь, чтобы получить вектор ускорения, разделим все на Δt и сгруппируем слагаемые при единичных векторах $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{e}_r\left(\frac{\Delta v_r}{\Delta t} - v_\varphi\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\Delta v_\varphi}{\Delta t} + v_r\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right).$$

Ясно, что в скобках получились проекции ускорения капельки в принятой нами вращающейся системе координат. Посмотрим на них внимательнее. Что такое $\Delta\varphi/\Delta t$? Это же угловая скорость v_φ/r! Использовав этот замечательный факт и приравняв радиальную и тангенциальную составляющие ускорения капельки соответствующим составляющим силы сопротивления, деленным на массу, получим

$$\frac{\Delta v_r}{\Delta t} = \frac{v_\varphi^2}{r} - \beta\left(v_r - 0\right),$$

$$\frac{\Delta v_\varphi}{\Delta t} = -\frac{v_r v_\varphi}{r} - \beta\left(v_\varphi - V_\varphi\right).$$

Тут в первом слагаемом правой части первого уравнения легко узнать центробежное ускорение, а коэффициент β во втором слагаемом можно представить в виде $\beta = 1/\tau$ (хотя бы из соображений размерностей). Кроме того, мы рассматриваем случай, когда радиальная составляющая скорости несущего газа равна нулю, а тангенциальная составляющая $V_\varphi(r)$ – есть произвольная функция радиуса. Такое движение можно, например, осуществить в цилиндрической трубе. А теперь, считая, что капелька очень мала и, значит, быстро «привыкает» к локальным условиям обтекания ее несущей средой, приравняем нулю левые части этих уравнений, т.е. будем рассматривать безынерционное, ползущее движение капельки, аналогичное движению шарика в глицерине. Тогда получим алгебраическую систему уравнений для определения локально установившихся составляющих скорости капельки во вращающейся системе координат:

$$\frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{v_r}{\tau} = 0, \quad \frac{v_\varphi - V_\varphi}{\tau} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = 0.$$

Чтобы не возиться с точным решением этой системы уравнений, используем физические соображения. Интуитивно ясно, что очень малые частицы будут двигаться по окружности почти с той же скоростью, что и несущая среда: $v_\varphi \approx V_\varphi$. Это значит, что частица должна сделать много оборотов вокруг оси при незначительном смещении по радиусу, т.е. $v_r \ll v_\varphi \approx V_\varphi$. Принимая значение $v_\varphi = V_\varphi$ в качестве первого приближения, из первого уравнения получим

$$v_r = \frac{\tau}{r}V_\varphi^2.$$

В частном случае $V_\varphi = \omega_0 r$ (несущая среда вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 как твердое тело) найдем

$$v_r = \omega_0^2 r\tau.$$

Учитывая, что $v_r = \Delta r/\Delta t$, решим полученное уравнение (с начальным условием $r = r_0$ при $t = 0$) на «большом» времени ($t \gg \tau$):

$$r = r_0 e^{\omega_0^2\tau t} = r_0 e^{\omega_0\tau\varphi} = r_0 e^{2\pi\frac{\tau}{T}\varphi},$$

где $\varphi = \omega_0 t$, $\omega_0 = 2\pi/T$, T — период (хотите — верьте, хотите — проверьте подстановкой). Таким образом, в принятых предположениях частица движется по так называемой логарифмической спирали. (Один Студент, забыв слово «спираль», назвал ее «окружностью переменного радиуса».)

Для тех, кто хочет провести вычисления, разумеется, важно знать, что такое τ. Сила сопротивления для шаровой частицы (сила Стокса) равна

$$F_{\text{сопр}} = 6\pi\eta a(v - V),$$

где a – радиус шарика, а η – вязкость, которую можно найти в справочниках (не забудьте обратить внимание на систему единиц). Тогда

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2}{9}\frac{\rho a^2}{\eta},$$

где ρ – плотность материала частицы. Например, для случая капельки воды ($\rho = 10^3$ кг/м^3) радиусом $a = 1$ мкм $= 10^{-6}$ м в воздухе ($\eta \approx 2\cdot 10^{-5}$ кг/(м·с)) получим

$$\tau \sim 10^{-5}\ \text{с}.$$

Сравним это время, например, со временем одного оборота при закрутке воздуха с такими капельками в трубке радиусом $r_0 = 1$ см с линейной скоростью $V_\varphi = 100$ м/с. Время одного оборота равно

$$T = \frac{2\pi r_0}{V_\varphi} = 2\pi\cdot 10^{-4}\ \text{с},$$

что в шестьдесят раз больше τ, так что наши предположения о квазиравновесном движении капельки верны. Отметим, что при этих условиях капелька имеет чудовищное центробежное ускорение:

$$V_\varphi^2/r_0 \sim 10^6\ \text{м/с}^2 = 10^5 g\,!$$

Итак, вращайте воздух в кондиционерах – и вы избавитесь от пыли, капель и микробов.