Как чайник стал таймером

А.СТАСЕНКО

timer ['taimə]: 1) хронометрист (на скачках); 2) часы, хронометр; 3) автоматический прибор, регулирующий продолжительность операции.

Англо-русский словарь

Не было часов у студента: счастливые их не наблюдают. Однако надо же знать – когда лекция, когда ужин… И тут пришло в голову Студенту использовать изменение со временем какой-нибудь физической величины, например температуры… чайника. А для этого пригодится лабораторный термометр, с помощью которого можно измерять температуру в пределах 0 °С < T < 100 °С.

Итак, «заведем» такие часы: нагреем воду в чайнике до 100 °С, укутаем его одеялом (чтобы часы дольше работали) и вставим в носик термометр (рис.1).

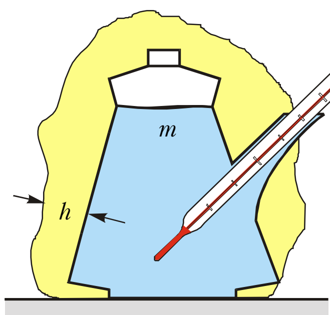

Рис. 1

Теперь нужно часы проградуировать – найти взаимно однозначное соответствие между временем t и показаниями термометра T (рис.2). Оценим прежде всего характерное время τ, за которое температура чайника заметно изменится. Почему он вообще остывает? Ясно, что это связано с наличием разности между температурой чайника T, зависящей от времени, и температурой окружающего воздуха T_∞, которая, в общем, тоже может изменяться, но мы будем считать ее постоянной.

Если эта разность температур существует в точках пространства, отстоящих друг от друга на расстояние h, то плотность потока тепла q (энергию, уходящую в единицу времени через единицу площади) записывают в виде

$$q = -\lambda \frac{T_\infty - T}{h}.$$

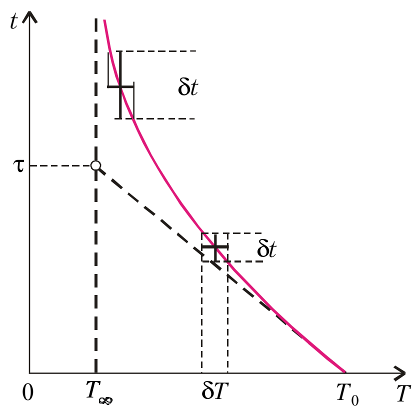

Рис. 2

Собственно, это соотношение определяет величину λ – коэффициента теплопроводности материала, через который протекает тепловая энергия. Легко установить размерность этой величины:

$$[\lambda] = \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

В нашем случае это коэффициент теплопроводности одеяла (вместе с содержащимся в нем воздухом). А знак «минус» напоминает, что тепло течет в сторону уменьшения температуры.

Далее, если площадь поверхности чайника равна S, то полная энергия, уходящая через эту площадь в единицу времени, равна, очевидно, qS.

Осталось записать ясную физическую идею: вследствие отвода тепловой энергии температура воды в чайнике T уменьшается. Если m – масса воды, c – ее удельная теплоемкость (теплоемкостью корпуса чайника и термометра пренебрежем), то

$$\frac{mc\Delta T}{\Delta t} = -\frac{S\lambda}{h}\left(T - T_\infty\right).$$

Считая, что произведение mc постоянно, запишем это уравнение в так называемом релаксационном виде:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{T - T_\infty}{\tau}, \qquad (*)$$

где величина

$$\tau = \frac{hmc}{S\lambda}$$

просто обязана иметь размерность времени (проверьте).

Сделаем численную оценку этого времени. Будем считать для простоты, что чайник имеет форму шара радиусом a, заполненного водой. Тогда его поверхность $S = 4\pi a^2$, масса воды в нем $m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$ (где ρ – плотность воды), так что

$$\tau = \frac{h\rho a c}{3\lambda}.$$

(В частности, отсюда видно, почему малышей нужно укутывать в три шубы особенно тщательно: поскольку их характерный размер a мал, нужно брать толщину шуб h побольше.)

Итак, выпишем значения всех необходимых величин: плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, ее удельная теплоемкость $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), коэффициент теплопроводности одеяла примем равным $\lambda = 0{,}03$ Вт/(м · К) (соответствующим хлопковой вате), его толщина пусть будет h = 3 см = = 0,03 м, «радиус» чайника $a \sim 0{,}1$ м. Тогда

$$\tau \sim \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 4{,}2 \cdot 10^3}{3 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} \text{ с} = 1{,}4 \cdot 10^5 \text{ с} \sim 40 \text{ ч}.$$

Но что это за время? Если строго решить дифференциальное уравнение (*), получится экспоненциальная зависимость температуры от времени. Качественно она изображена на рисунке 2 сплошной линией. Характерное время τ получается при пересечении наклонной прямой, касательной к кривой $T(t)$ в начальной точке $T_0 = 100$ °С, с прямой $T_\infty = \text{const}$ (см. штриховые прямые на рисунке 2). Ра-